

# 微圧縮大変形解析における2種の次世代四面体平滑化有限要素法 (EC-SSE-SRI-T4 および FC-SSE-SRI-T4) の性能比較

大西 有希（東京科学大学）

# 研究背景

## 実現したい内容

- 「超」大変形問題をFEMで  
高精度かつロバストに速く解きたい.
- 複雑形状を四面体で解きたい.
- 微圧縮性が現れる材料も解きたい.
- 自動リメッシングも実現したい.
- 接触も扱いたい.

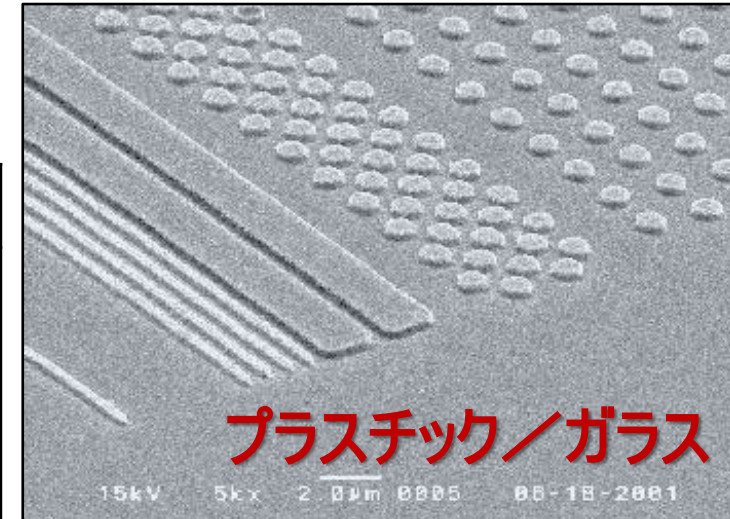


## 現状

精度・大変形ロバスト性・計算速度  
の三拍子が揃った四面体定式化が  
まだ確立されていない...

### 精度の問題

- せん断ロッキング
- 体積ロッキング
- 圧力チェッカーボーディング
- 節点反力振動 など

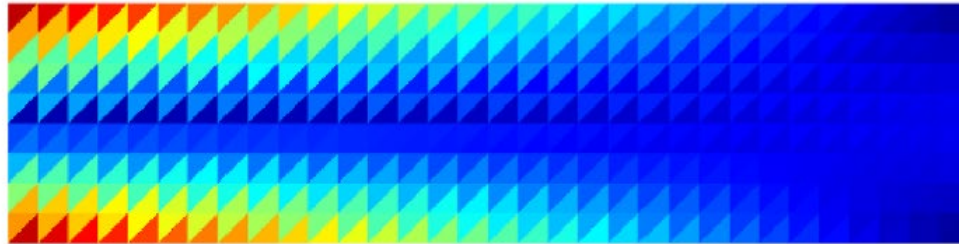


# エッジ中心ひずみ平滑要素 (EC-SSE) の可能性

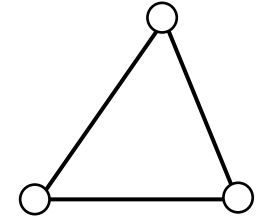
## 片持ち梁の曲げのMises応力分布比較 (3節点三角形メッシュ)

T. Jinsong et al., Euro. J. Mech. /A, v95, 2022.

FEM-T3



応力分布が階段状で低精度.  
実は, せん断ロッキングも  
起こしている.

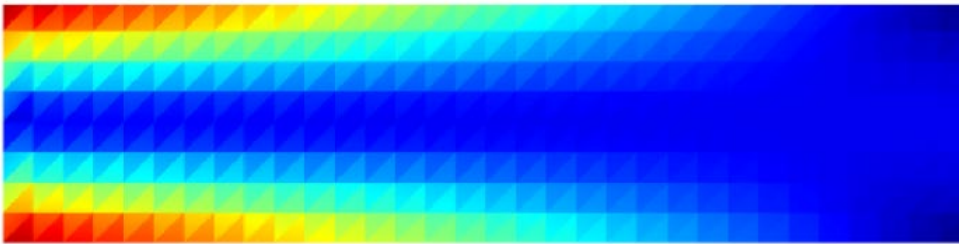


T3

ポアソン比は0.3

SSE

Strain  
Smoothing  
Element

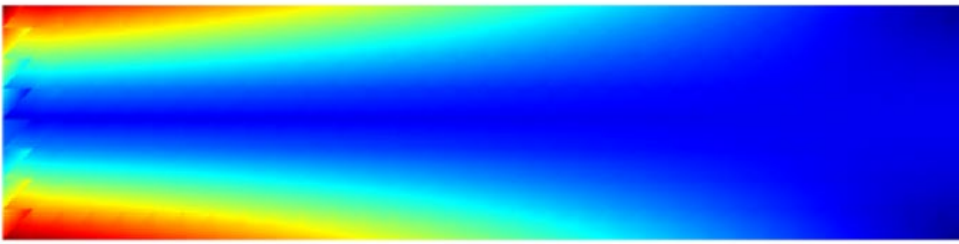


- ひずみ/応力が要素内で線形分布なので高精度.
  - 更にEC-SSEではひずみ/応力の連続性もある.
  - せん断ロッキングなし.
- ただし, 微圧縮だと
- 体積ロッキングあり.
  - 圧力チェッカーあり.

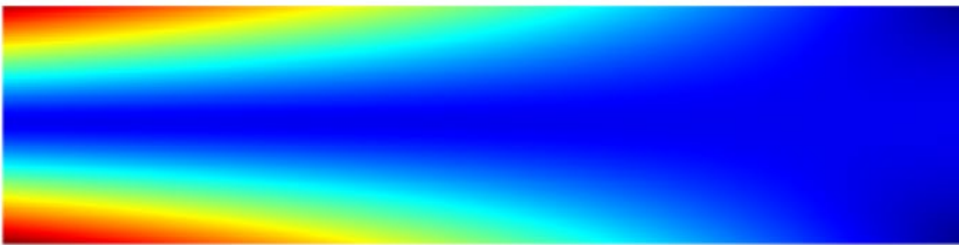
次世代のS-FEM  
「S-FEM 2.0」  
と呼ぶにふさわしい  
飛躍的進歩

EC-SSE

Edge  
Center-based  
SSE



Analytic

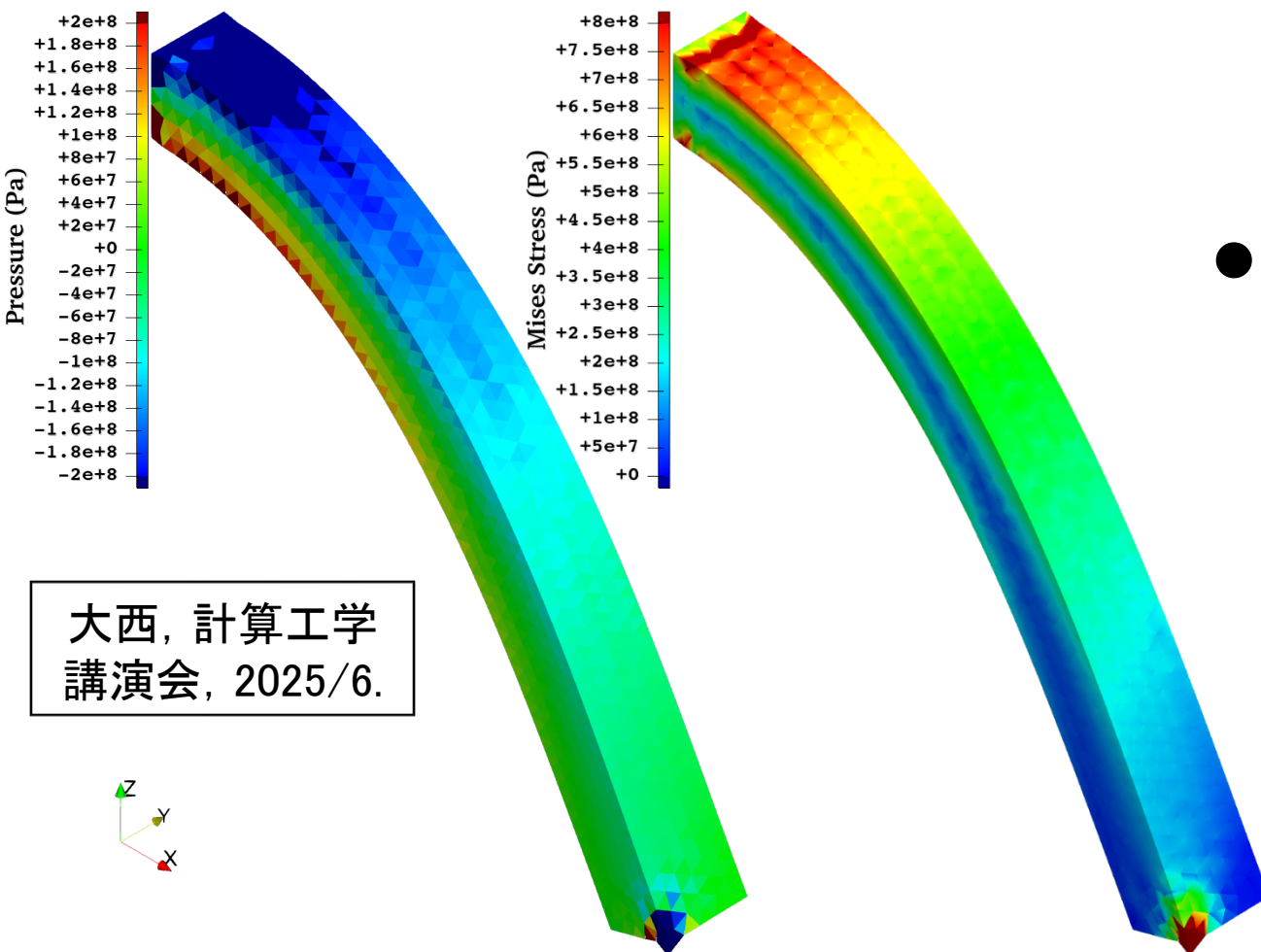


詳細は後述

ポアソン比0.49までのゴム大変形に拡張したい!  
⇒ 近年 EC-SSE-SRI-T4 を提唱.

## 3次元片持梁の微圧縮大たわみ解析

初期ポアソン比 $\nu_{ini} = 0.49$ のNeo-Hooke超弾性体



大西, 計算工学  
講演会, 2025/6.

● 定式化の3つのポイント(詳細は簡単に後述):

- ① 選択的低減積分(SRI)
- ② 体積歪みの二重平滑
- ③ 非整合な静水圧応力積分

● 性能:

- 圧力チェッカーボーディングを十分に低減.
- 各種ロッキングおよび節点反力振動なし.
- 大変形ロバスト性も良好. 実用性は充分
- 計算時間は同メッシュのFEM-T4の約7倍.

「精度」と「大変形ロバスト性」の問題はほぼクリアしたが,  
「計算速度」だけが未だクリアとは言い難い状況.  
⇒ 平滑化を簡略化すれば, もうチョット速くならないか?



ゴム大変形用の次世代平滑化有限要素法(**EC-SSE-SRI-T4**)の  
偏差ひずみ/応力成分の計算方法を少し簡略化した  
**FC-SSE-SRI-T4**を実装し, 両者の精度と計算時間を比較する.

## 発表目次:

- 手法: **EC-SSE-SRI-T4** と **FC-SSE-SRI-T4**の定式化紹介
- 結果と考察: 解析例を通じた精度と計算コストの比較
- まとめ

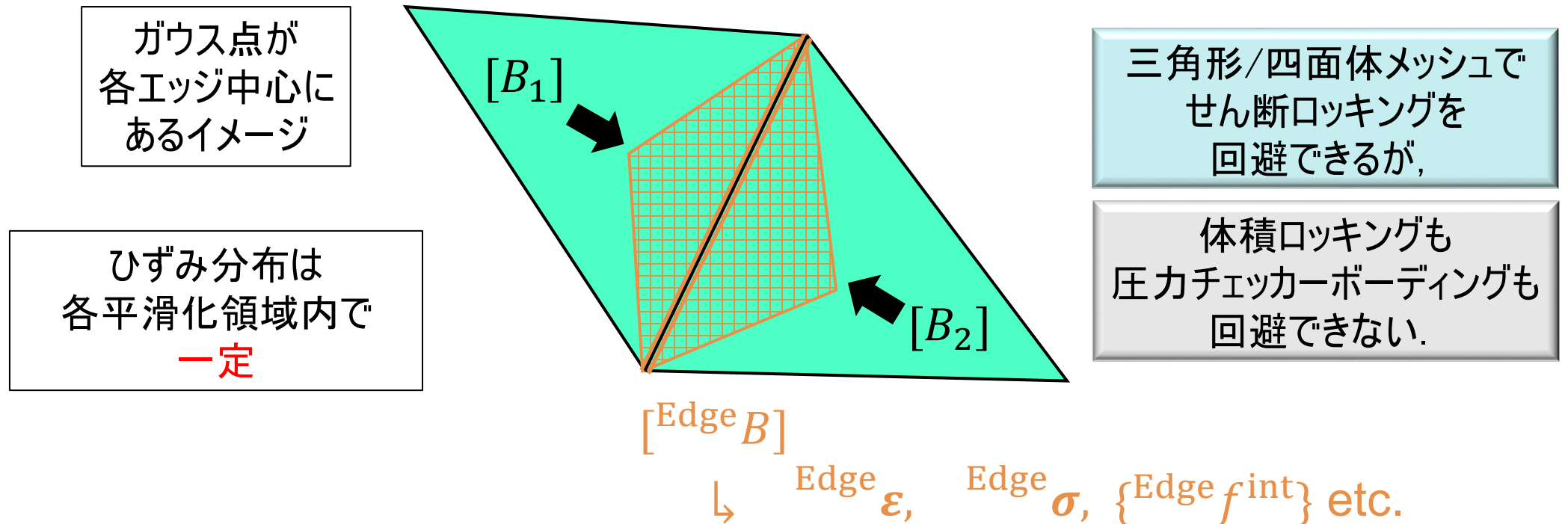
# 手法

EC-SSE-SRI-T4 と FC-SSE-SRI-T4 の定式化紹介

# 2次元のES-FEMの定式化概要

下図のような3節点三角形メッシュがあるとする.

- 各セルのひずみ-変位マトリックス $[B]$ を通常のFEMと同様に作る.
- 各エッジにて周辺セルの $[B]$ を集め, 集めた各セルの体積を重みとして $[B]$ を平均化し, エッジ平滑化領域の $[^{\text{Edge}}B]$ を作る.
- $[^{\text{Edge}}B]$ を用いて各エッジのひずみ $\varepsilon$ ・応力 $\sigma$ ・節点内力 $\{f^{\text{int}}\}$ を計算する.

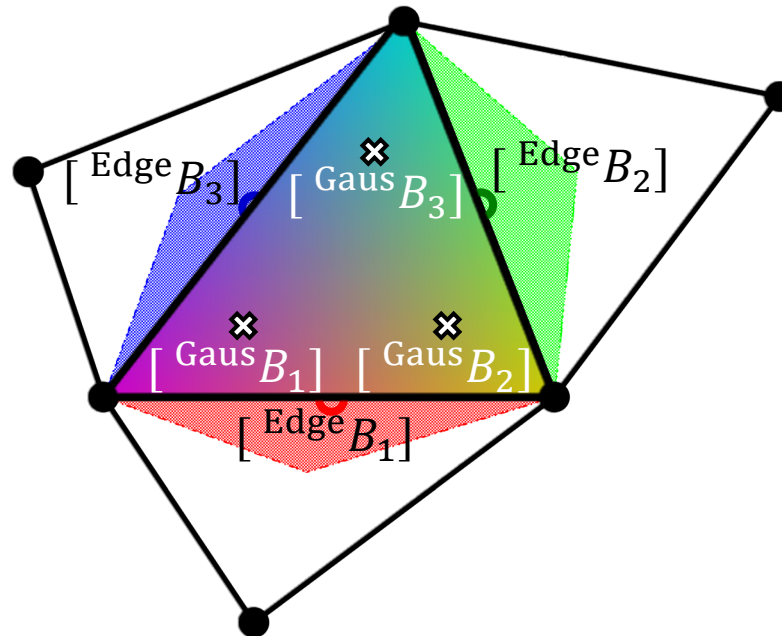


## 2次元のEC-SSE-T3の定式化概要

- ES-FEMの手順で各エッジの $[{}^{\text{Edge}}B]$ を作る。(エッジを共有する2個のセルの $[B]$ の平均)
- $[{}^{\text{Edge}}B]$ は各エッジ中心点の物で、各セル内で線形分布だと考える。
- $[{}^{\text{Edge}}B]$ をセル内の3ガウス点へと外挿して $[{}^{\text{Gaus}}B]$ を作る。
- $[{}^{\text{Gaus}}B]$ を用いて各ガウス点のひずみ・応力を計算し、  
三角形2次要素と同様にガウスの3点積分で節点内力を計算する。

ひずみ平滑化を  
2回行って  
ガウス点で  
ひずみ/応力を  
評価・積分する

ひずみ分布は  
各セル内で線形  
かつ  
エッジ中心で連続



三角形メッシュで  
せん断ロックを  
回避できる上に、  
ひずみ/応力の  
メッシュ収束が極めて速い

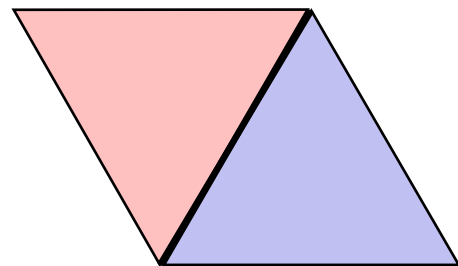
体積ロックも  
圧力チェッカーボーディングも  
回避できない。



# ES-FEMの3次元化

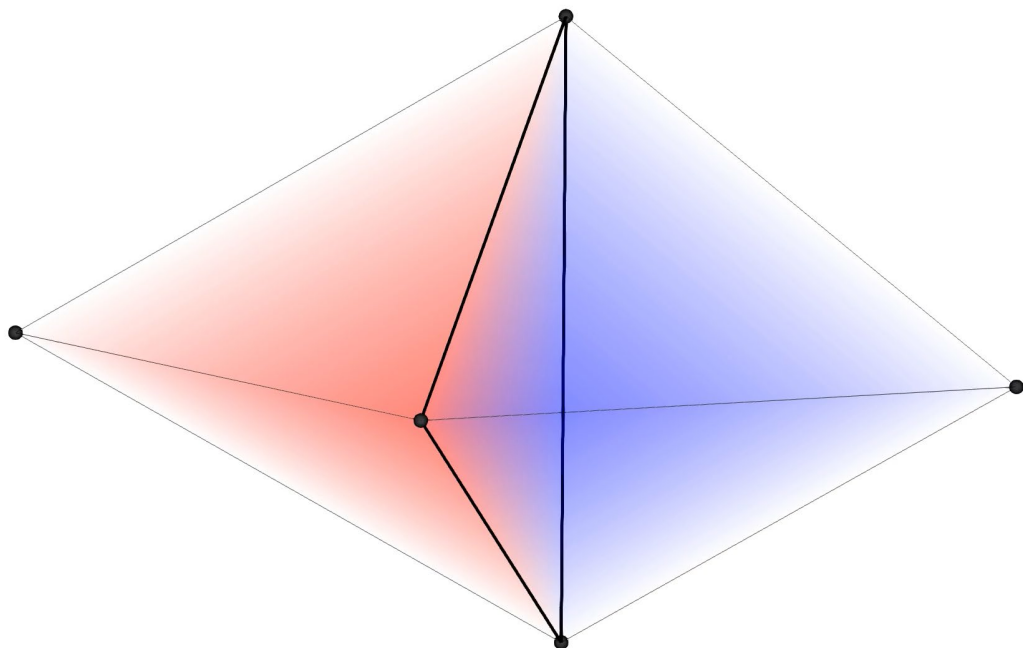
- 2個の三角形セルに共有されるエッジでひずみ平滑化するとES-FEM-T3.

「2個」を保って  
3次元化

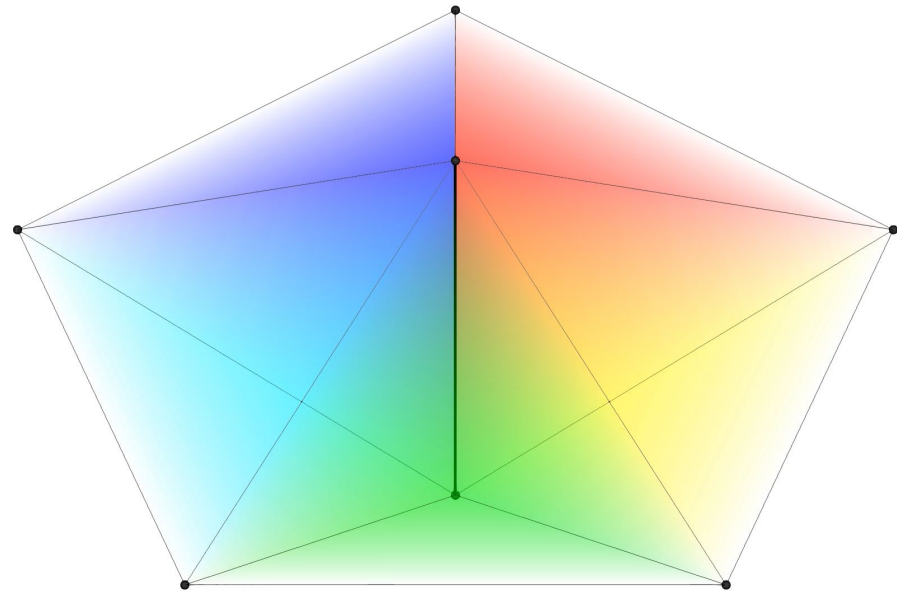


「エッジ」を保って  
3次元化

- 2個の四面体セルに共有されるフェイスでひずみを平滑化するとFS-FEM-T4.



- 5個前後の四面体セルに共有されるエッジでひずみを平滑化するとES-FEM-T4.



# 3次元のFC-SSE-T4の定式化概要

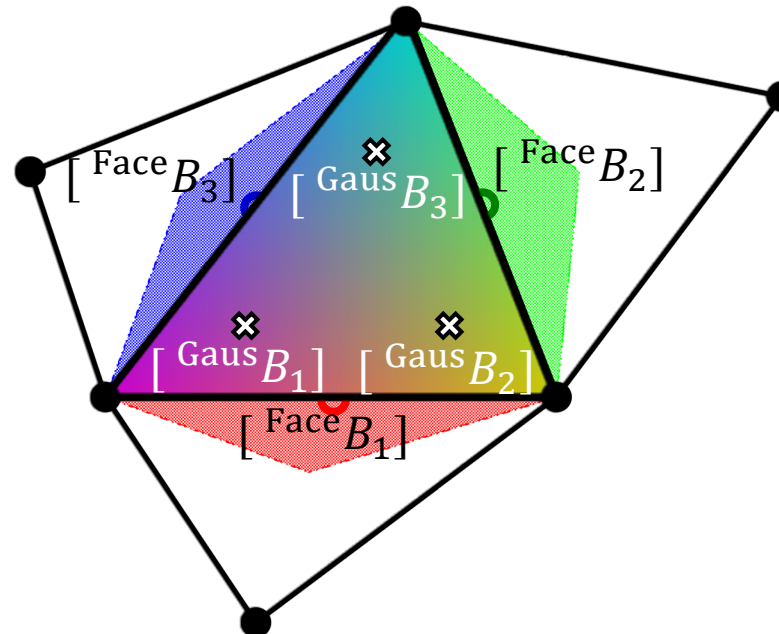
- FS-FEMの手順で各フェイスの $[^{Face}B]$ を作る。(フェイスを共有する2個のセルの $[B]$ の平均)
- $[^{Face}B]$ は各フェイス中心点の物で、各セル内で線形分布だと考える。
- $[^{Face}B]$ をセル内の4ガウス点へと外挿して $[^{Gaus}B]$ を作る。
- $[^{Gaus}B]$ を用いて各ガウス点のひずみ・応力を計算し、四面体2次要素と同様にガウスの4点積分で節点内力を計算する。

2次元EC-SSE-T3の  
自然な3次元拡張が  
FC-SSE-T4

三角形を四面体だと思ってください。

ひずみ平滑化を  
2回行って  
ガウス点で  
ひずみ/応力を  
評価・積分する

ひずみ分布は  
各セル内で線形  
かつ  
エッジ中心で連続



四面体メッシュで  
せん断ロッキングを  
回避できる上に、  
ひずみ/応力の  
メッシュ収束が速い

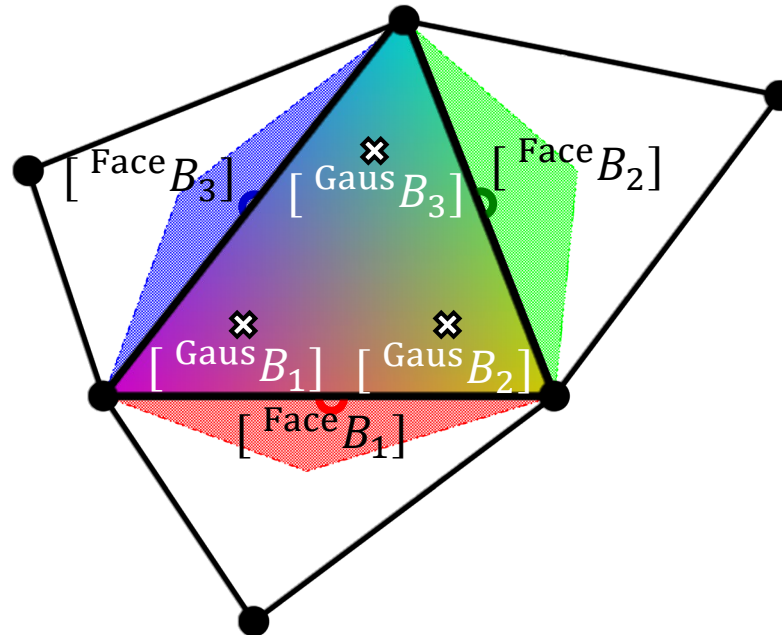
体積ロッキングも  
圧力チェッカーボーディングも  
回避できない。

# 3次元のEC-SSE-T4の定式化概要

- ES-FEMの手順で各エッジの $[^{Edge}B]$ を作る。(エッジを共有する約5個のセルの $[B]$ の平均)
- フェイスを構成する3エッジの $[^{Edge}B]$ を平均化し、各フェイスの $[^{Face}B]$ を作る。
- $[^{Face}B]$ は各フェイス中心の物で、各セル内で線形分布だと考える。
- $[^{Face}B]$ をセル内の4ガウス点へと外挿して $[^{Gaus}B]$ を作る。
- $[^{Gaus}B]$ を用いて各ガウス点のひずみ・応力を計算し、四面体2次要素と同様にガウスの4点積分で節点内力を計算する。

ひずみ平滑化を  
2回行って  
ガウス点で  
ひずみ/応力を  
評価・積分する

ひずみ分布は  
各セル内で線形  
かつ  
エッジ中心で連続



四面体メッシュで  
せん断ロックを  
回避できる上に、  
ひずみ/応力の  
メッシュ収束が極めて速い

体積ロックも  
圧力チェッカーボーディングも  
回避できない。

# ①選択的低減積分と②体積歪みの二重平滑

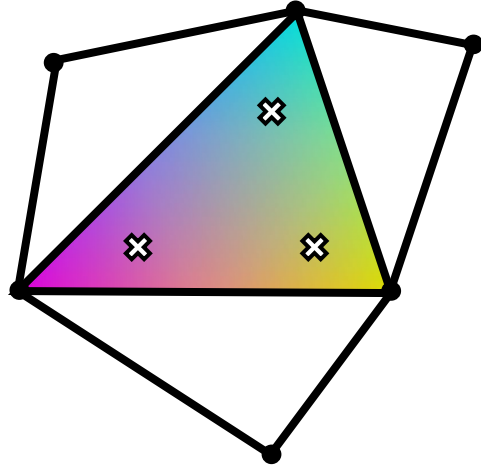
ポイント①②③は  
EC-SSE-SRIと  
FC-SSE-SRIで  
共通

微圧縮材料に対応するため、選択的低減積分(SRI)を適用.

簡単のため  
2次元の  
3節点三角形  
メッシュで  
説明します.

(1) EC or FC-SSEによる各ガウス点での偏差ひずみの計算

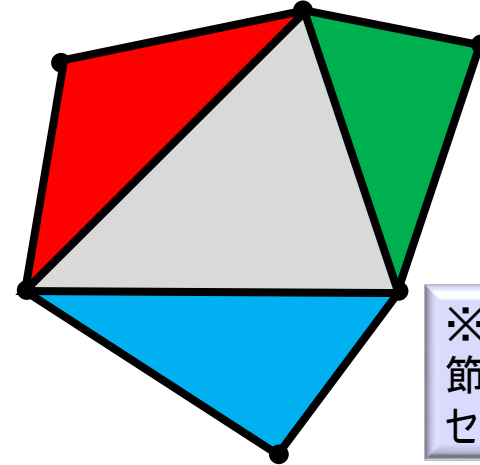
偏差成分



(2) 各ガウス点での偏差応力とその節点内力寄与 $\{f_{dev}^{int}\}$ の計算

(3) 二重平滑を経た各セルでの体積ひずみの計算

体積成分



※二重平滑  
節点でのひずみ平滑(NS-FEM)の後に、  
セルでのひずみ平滑(NS-FEM<sup>-1</sup>)を行う.

(4) 各セルでの静水圧応力とその節点内力寄与 $\{f_{hyd}^{int}\}$ の計算

選択的低減積分  
(SRI)

- せん断ロッキングの回避
- せん断応力精度の向上

- 体積ロッキングの回避
- 圧力チェッカーボーディングの低減

(5) 節点内力 $\{f^{int}\}$ の組み立て

### ③ 非整合な静水圧応力積分

■ あるセル $c$ における静水圧応力積分(1点積分)の式:

静水圧応力の  
節点内力寄与

標準的な  
FEM-T4の  
Bマトリックス

標準的な  
FEM-T4の  
セル体積

$$\{\text{Cell}_c f_{\text{hyd}}^{\text{int}}\} = [\text{Cell}_c B]^T \{\text{Cell}_c \tilde{\sigma}_{\text{hyd}}\} \text{Cell}_c V$$

二重平滑を経たひずみ  
の体積成分 $\text{Cell}_c \tilde{\epsilon}_{\text{vol}}$ から  
算出された静水圧応力

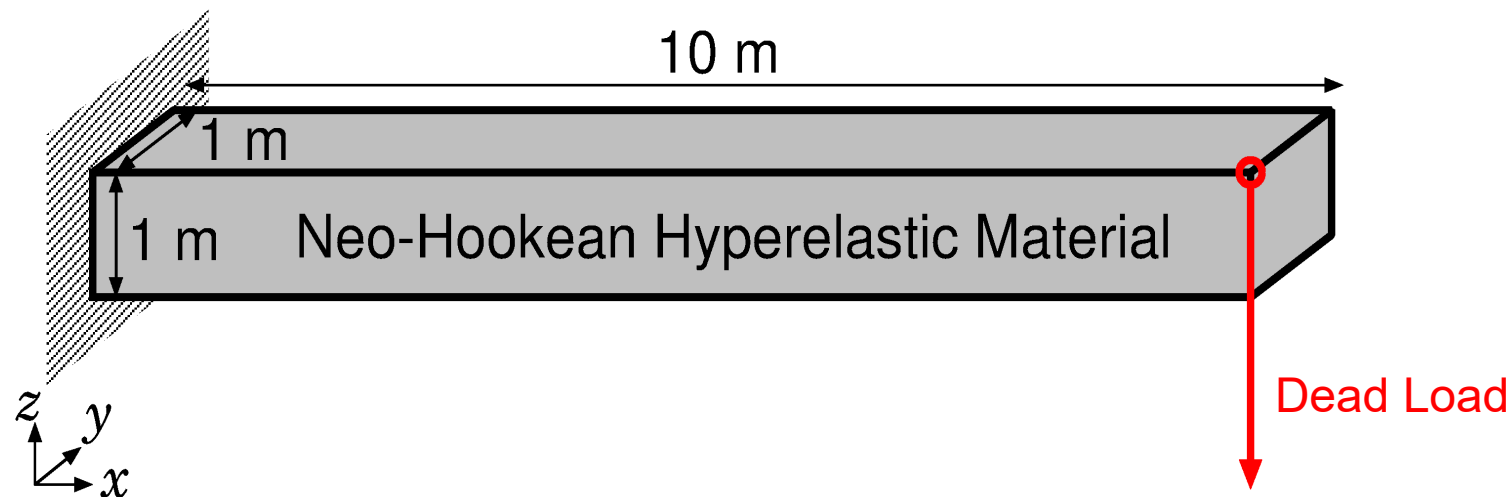
- $[\text{Cell}_c B]$ を用いることで節点内力の分配範囲が狭くなる(左辺ベクトルは4節点分のみ).
- 他方,  $\{\text{Cell}_c \tilde{\sigma}_{\text{hyd}}\}$ はセル $c$ 周辺の多数のセルから算出される.
- 要するに「広く集めて,狭く配る」静水圧応力積分で**圧力チェッカーボーディングを強力に低減**.
- デメリットとして, **非整合な応力積分**により動解析時のエネルギー発散が起きる  
( $[K] = [B]^T [D] [B]$  の形式でなくなることにより正定値性が失われる)が, **静解析なら大丈夫**.

# 結果と考察

解析例を通じた精度と計算コストの比較

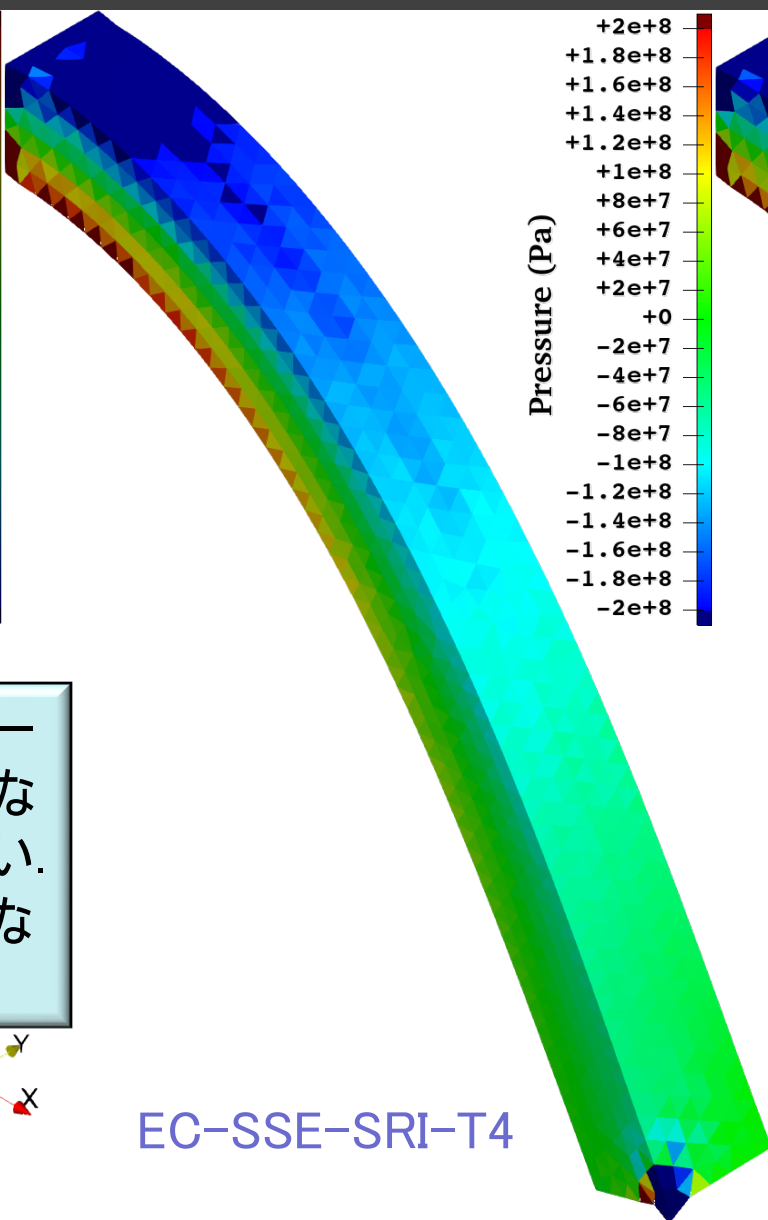
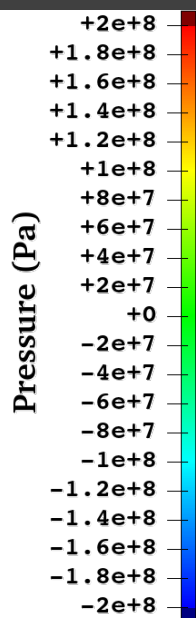


## 概要

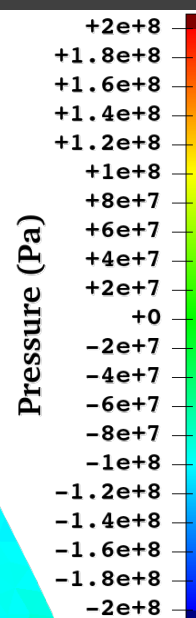


- 10 m x 1 m x 1 m の片持ち梁の先端に死荷重.
- Neo-Hook超弾性体 ( $E_{ini} = 6$  GPa,  $\nu_{ini} = 0.49$ )
- 先端の最終たわみが約6.5 mの大たわみ問題.
- 先端荷重が20 MNとなった時点の応力分布をECとFCで比較.

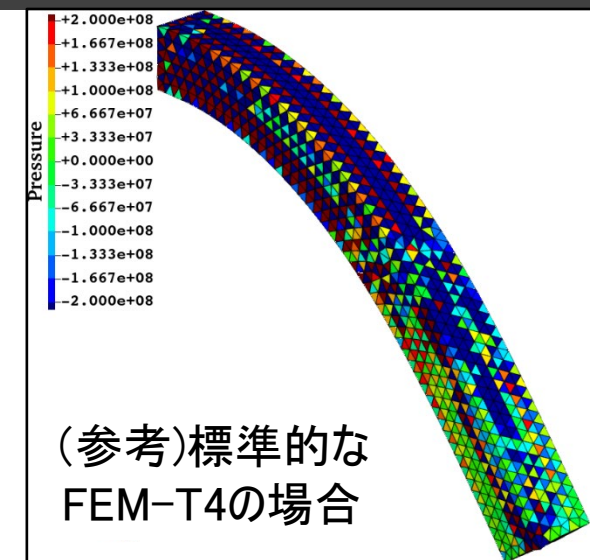
## 圧力 解析結果 (最終状態) の比較



EC-SSE-SRI-T4



FC-SSE-SRI-T4

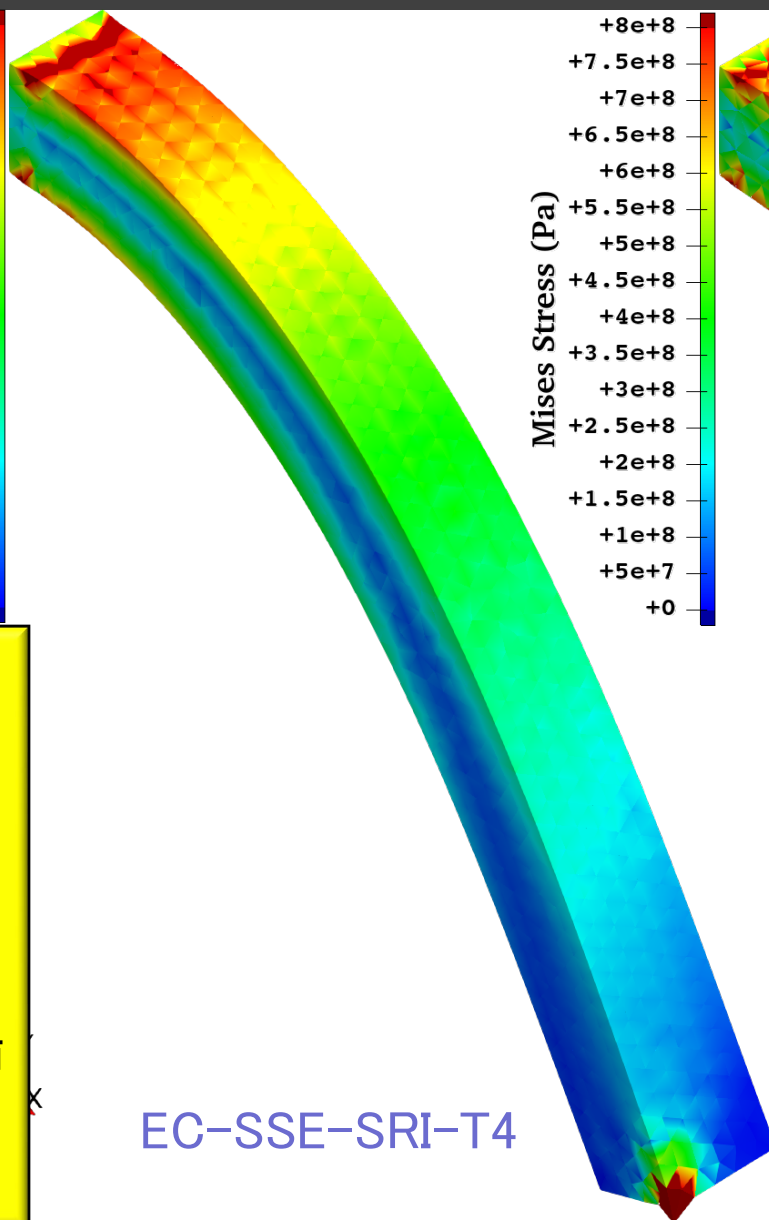


- 両者共に圧力チェッカーボーディングが低減された綺麗な分布で、ほとんど違いはない。
- 節点変位・反力にも問題なし(詳細略)。

## Mises応力 解析結果 (最終状態) の比較

Mises Stress (Pa)

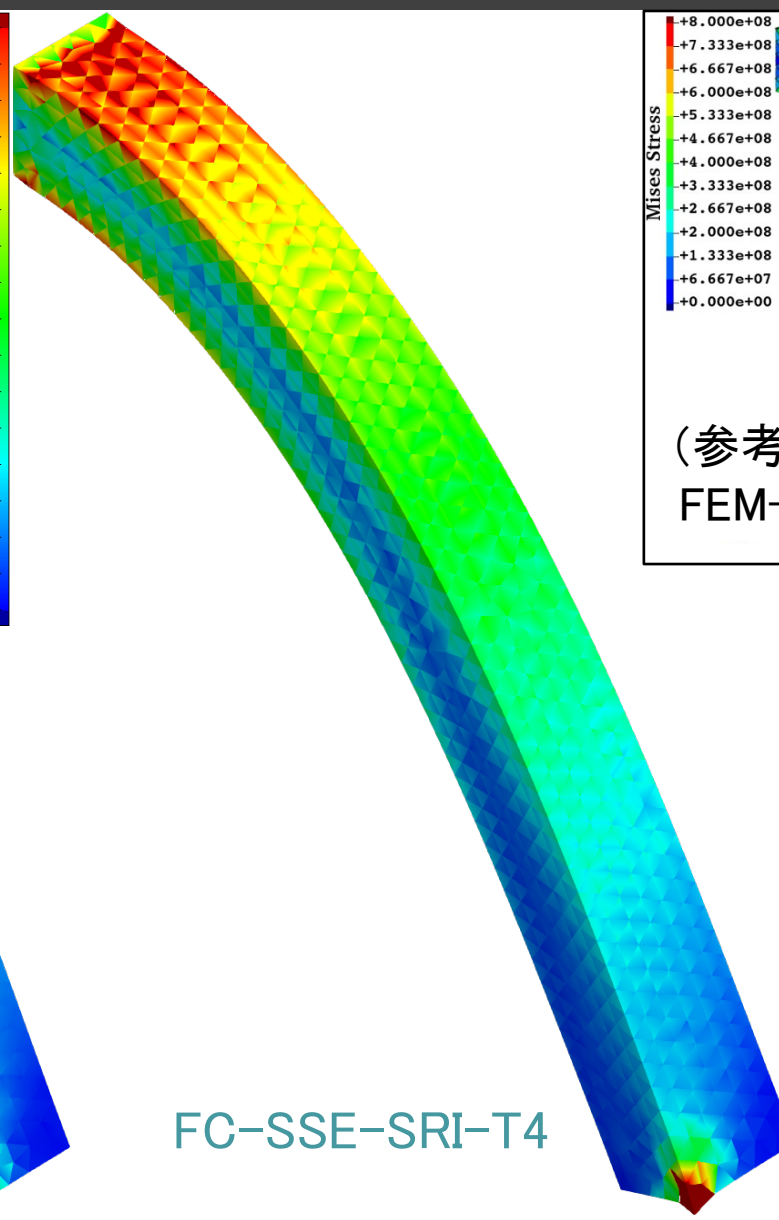
+8e+8  
+7.5e+8  
+7e+8  
+6.5e+8  
+6e+8  
+5.5e+8  
+5e+8  
+4.5e+8  
+4e+8  
+3.5e+8  
+3e+8  
+2.5e+8  
+2e+8  
+1.5e+8  
+1e+8  
+5e+7  
+0



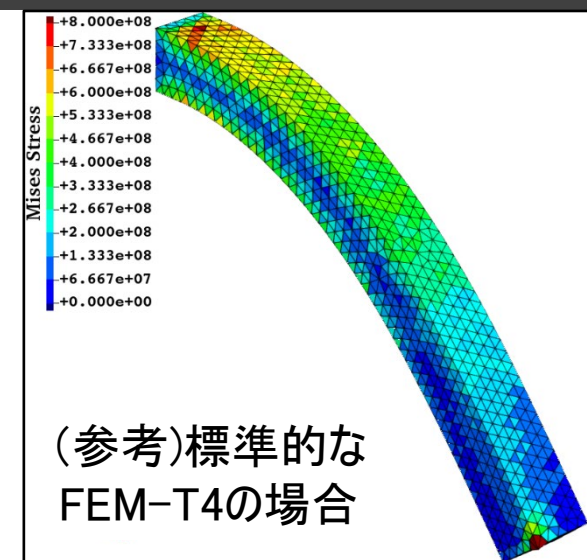
EC-SSE-SRI-T4

Mises Stress (Pa)

+8e+8  
+7.5e+8  
+7e+8  
+6.5e+8  
+6e+8  
+5.5e+8  
+5e+8  
+4.5e+8  
+4e+8  
+3.5e+8  
+3e+8  
+2.5e+8  
+2e+8  
+1.5e+8  
+1e+8  
+5e+7  
+0



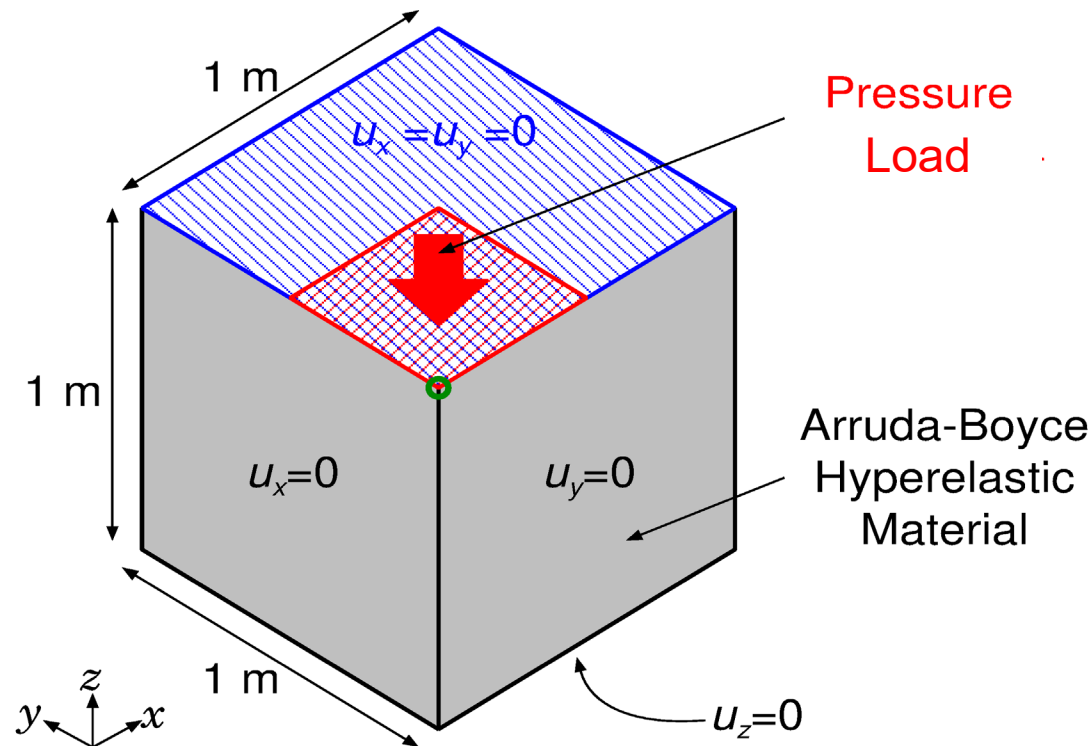
FC-SSE-SRI-T4



(参考)標準的な  
FEM-T4の場合

- ECもFCもフェイス中心で歪みと応力は連続だが、その他の点では不連続なので、振動は見て当然.
- FCの分布にはやや激しい鱗状の振動が見られる.
- ECより弱い平滑化で外挿を含むガウス4点積分をしていることが原因.

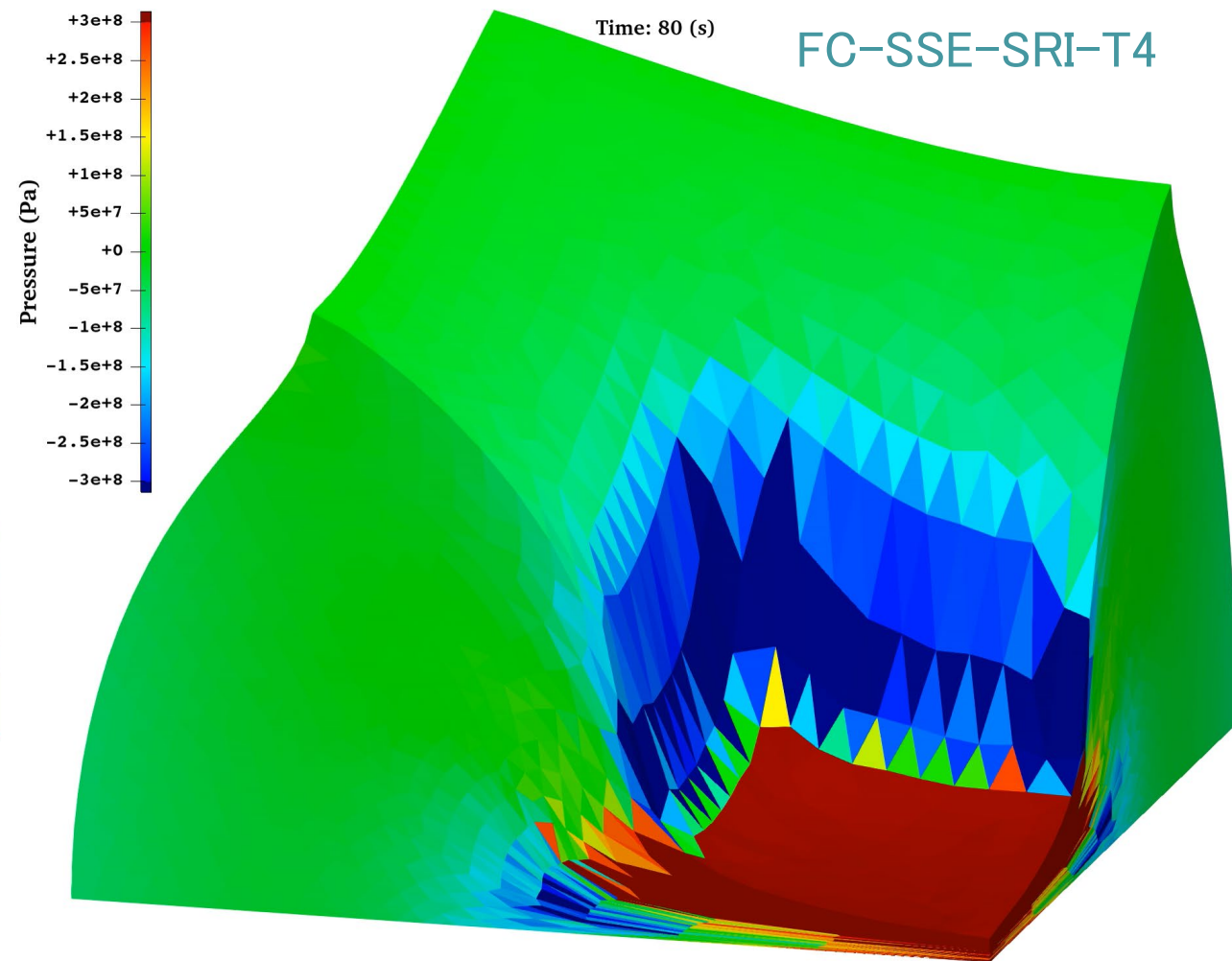
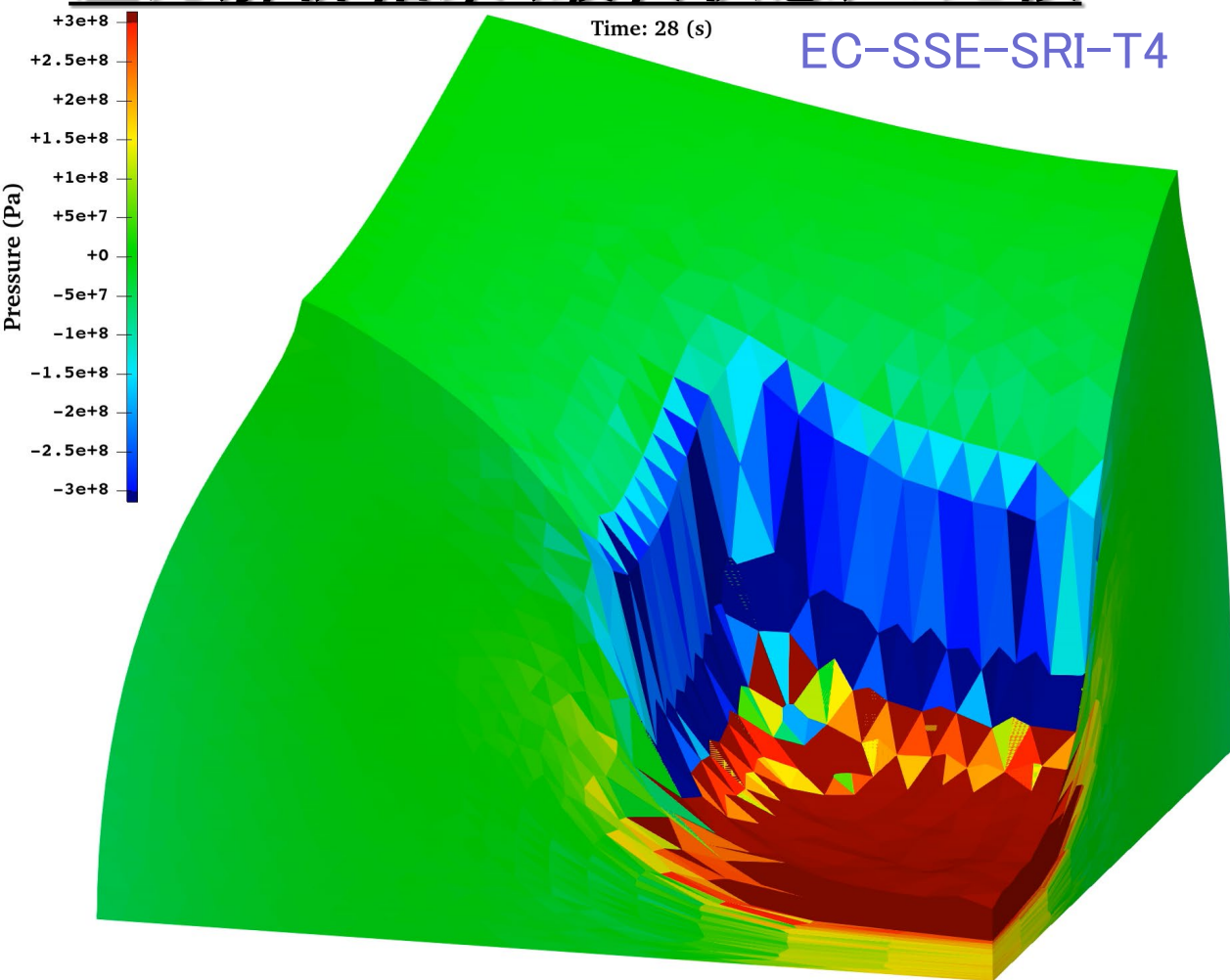
## 概要



- 1/4モデル.
- Arruda-Boyce超弾性体 ( $\nu_{ini} = 0.49$ ).
- 上面の1/4の領域に圧力を加えて押し込む.
- 押し込圧力を1秒あたり30 MPaずつ増やした際の応力分布をECとFCで比較.

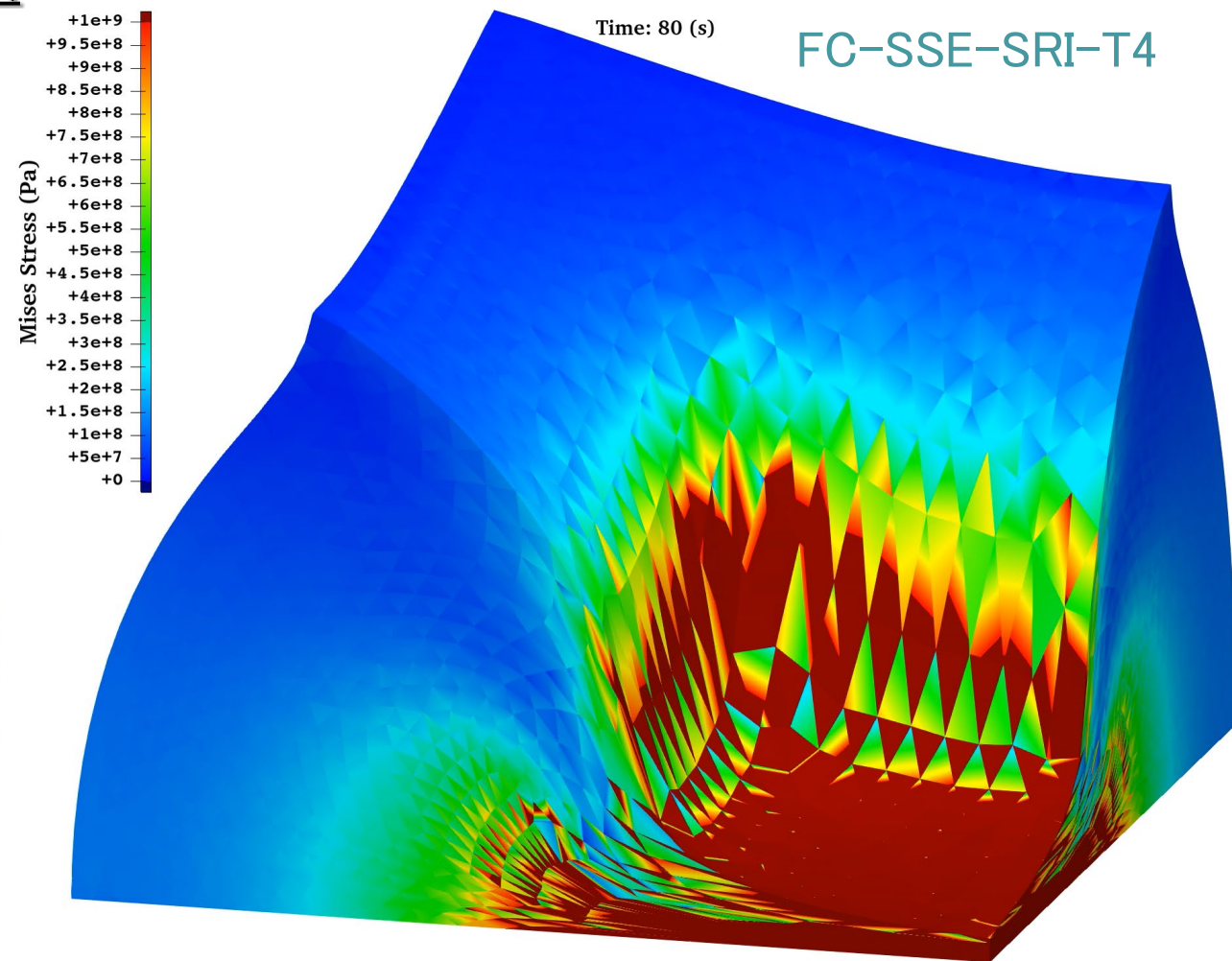
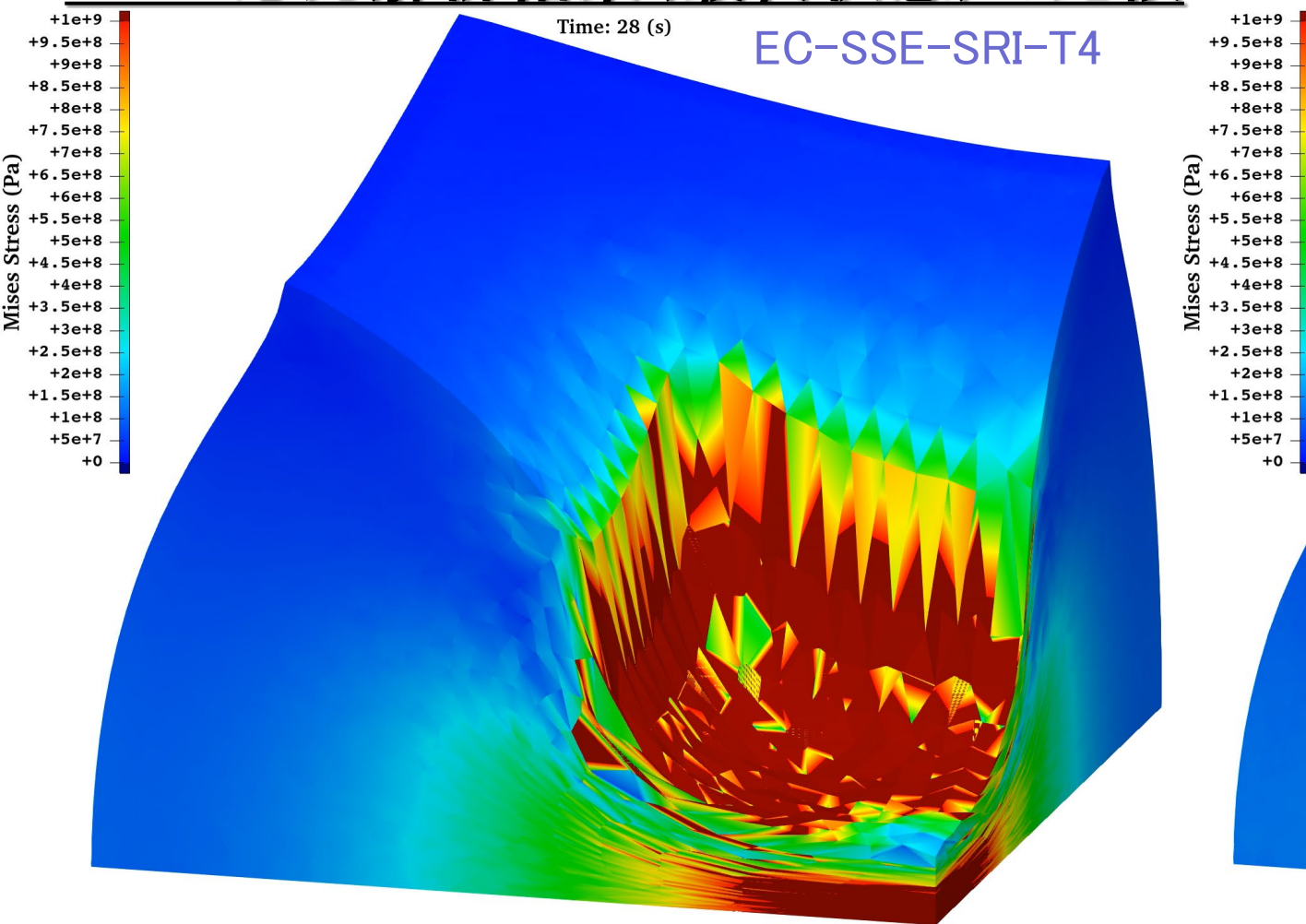


## 圧力解析結果(最終状態)の比較



ECよりFCの方が圧力チェッカーボーディングが少なく、大変形ロバスト性も高い。

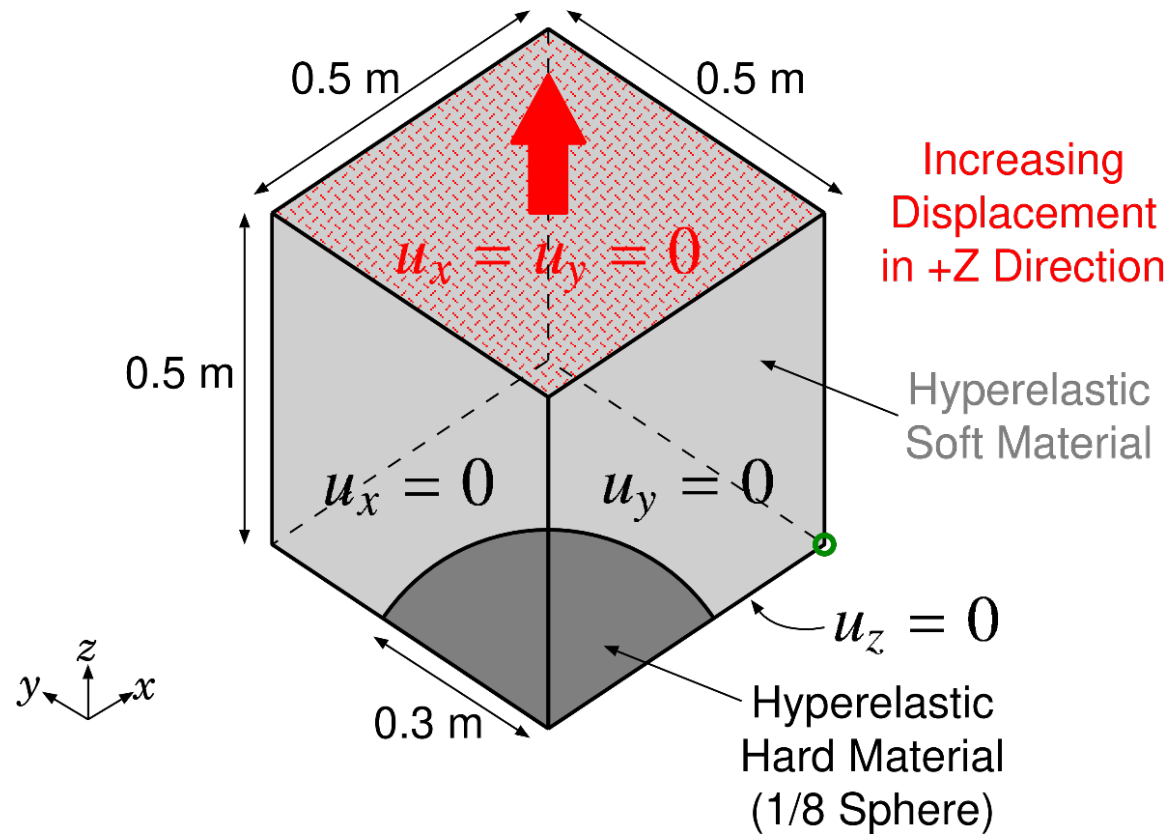
## Mises応力解析結果(最終状態)の比較



やはりECよりFCの方が鱗状Mises応力振動が全体的に激しい。



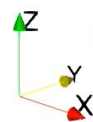
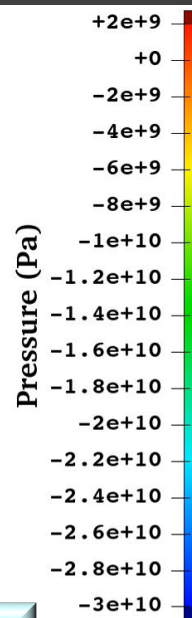
## 概要



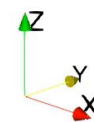
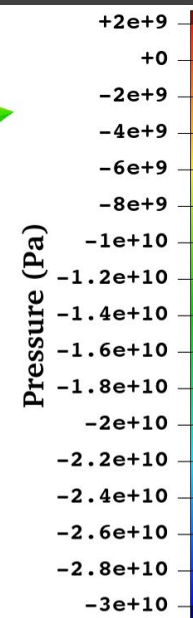
- 1/8モデル
- 鉄ファイラー: Neo-Hook超弾性体 ( $E_{ini} = 260 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{ini} = 0.3$ )
- ゴム: Neo-Hook超弾性体 ( $E_{ini} = 6 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{ini} = 0.49$ )
- 高さ0.5 mを1.25 mになるまで引き伸ばした際の応力分布をECとFCで比較.

## 圧力 解析結果 の比較

- 両者共に圧力チェックボーディングが低減された綺麗な分布.
- 鉄フィラー部のみならず, ゴム部でも両者の違いはほとんど見られない.
- 大変形ロバスト性はほぼ同じ.



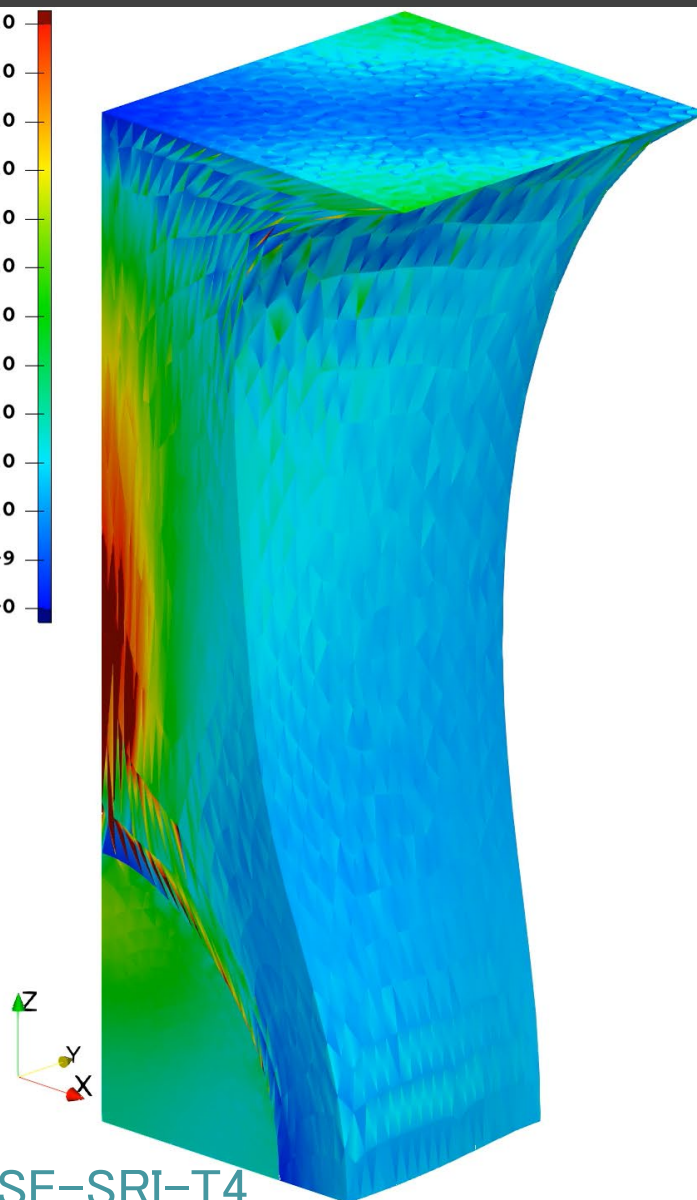
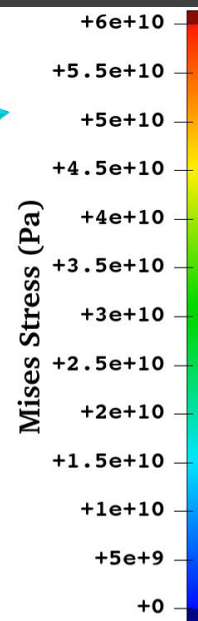
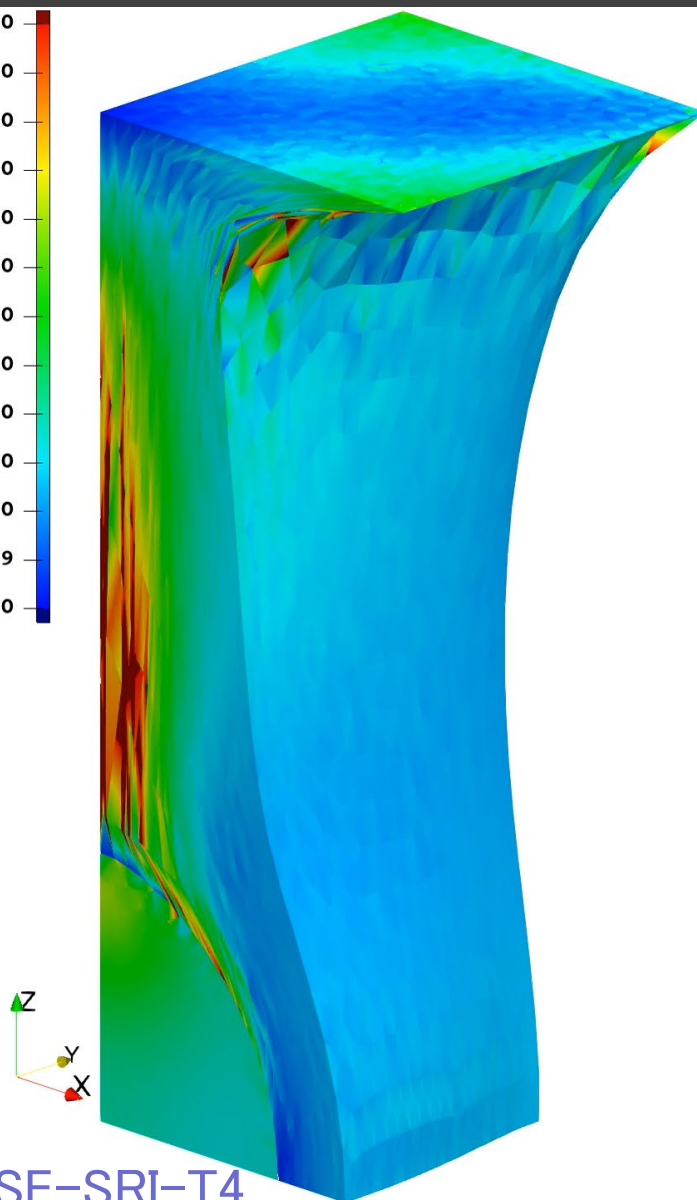
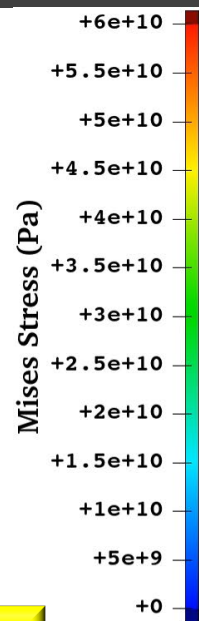
EC-SSE-SRI-T4



FC-SSE-SRI-T4

## Mises応力 解析結果 の比較

- やはりECよりFCの方が  
鱗状Mises応力振動が  
全体的に激しい。



# 計算時間に関する考察

- 陰解法の計算時間の大部分は剛性方程式を解くことに費やされるため、剛性マトリックス $[K]$ のサイズが計算時間に直結する。
- S-FEMファミリーは純粋な変位型の定式化なので、剛性マトリックス $[K]$ の行数/列数(自由度の数 $N$ )はFEM-T4と全く同じ。
- つまり,  $[K]$ のバンド幅が計算時間に直結する。

定式化	$[K]$ のバンド幅	対FEM-T4比
FEM-T4	約14節点×3自由度	1 倍
FEM-T10	約28節点×3自由度	約2倍
ES-FEM-T4	約45節点×3自由度	約3倍
NS-FEM-T4, FC-SSE-SRI-T4	約60節点×3自由度	約4倍
EC-SSE-T4-SRI	約94節点×3自由度	約7倍

要素をまたぐ歪み  
平滑を繰り返す毎に  
剛性マトリックス $[K]$ の  
バンド幅は広がる。

目論見通り, 計算時間はECの半分強に短縮されている。

# まとめ

# FC-SSE-SRI-T4のまとめ

- ゴム大変形用の次世代平滑化有限要素法である「EC-SSE-SRI-T4」の偏差成分計算を簡略化することで高速化した「FC-SSE-SRI-T4」を提案した.
- 同一メッシュでのFCの計算時間はFEM-T4の約4倍であり, ECの半分強に抑えられた.
- ポアソン比0.49の微圧縮問題において, 圧力チェッカーボーディングの低減効果は確認され, 大ひずみではECよりやや綺麗な圧力分布を示す例もあった.
- しかし, FCのMises応力分布は鱗状に振動しており, 偏差応力の精度は明らかにECより悪化していることが確認された.
- Mises応力の精度より圧力の精度が重要, というニッチな案件なら役立つかも.....
- 引き続き, 別のアイデアで検討を進めております.

ご清聴ありがとうございました.



# 付録

# 2次元のNS-FEMの定式化概要

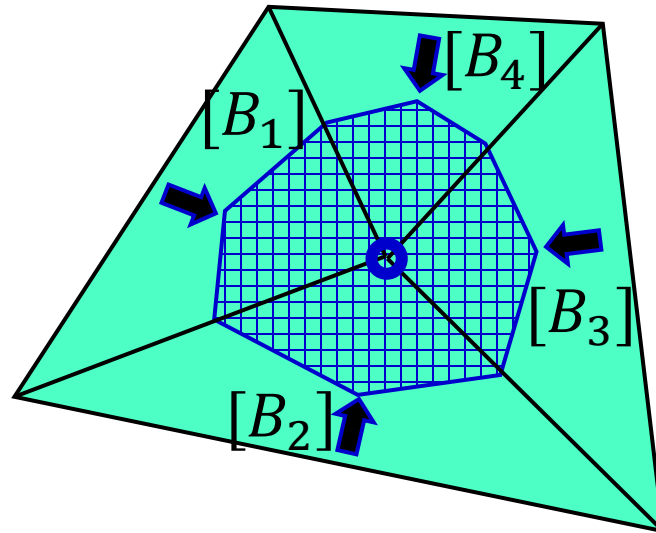
下図のような3節点三角形メッシュがあるとする.

- 各セルのひずみ-変位マトリックス $[B]$ を通常のFEMと同様に作る.
- 各ノードにて周辺セルの $[B]$ を集め, 集めた各セルの体積を重みとして $[B]$ を平均化し, ノード平滑化領域の $[^{\text{Node}}B]$ を作る.
- $[^{\text{Node}}B]$ を用いて各ノードのひずみ $\varepsilon$ ・応力 $\sigma$ ・節点内力 $\{f^{\text{int}}\}$ を計算する.

簡単のため  
2次元の  
3節点三角形  
メッシュで  
説明します.

ガウス点が  
各ノードに  
あるイメージ

ひずみ分布は  
各平滑化領域内で  
一定



三角形/四面体メッシュで  
せん断・体積ロッキングを  
回避できるが,

圧力チェッカーボーディングは  
残存してしまう,  
疑似低エネルギーモード  
(アワーグラスモードの類)  
が現れてしまう.

$[^{\text{Node}}B]$   
↳  $\text{Node } \varepsilon, \text{Node } \sigma, \{\text{Node } f^{\text{int}}\} \text{ etc.}$