

次世代平滑化有限要素法(**EC-SSE-SRI-T4**)における 圧力チェッカーボーディング抑制法の検討

大西 有希（東京科学大学）

研究背景

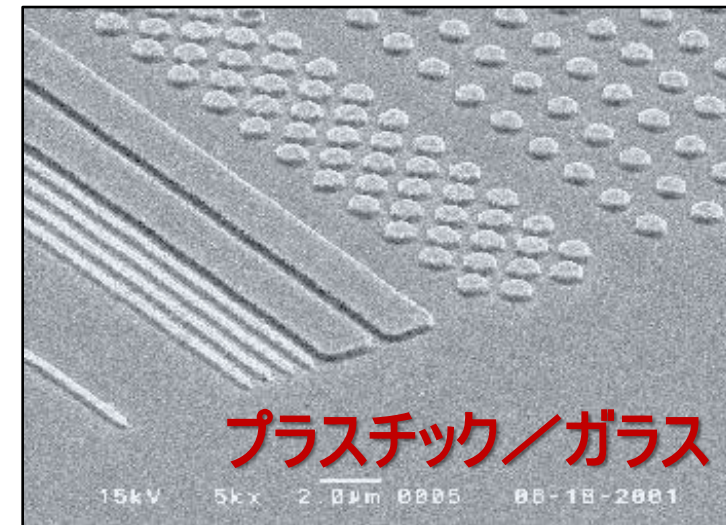
実現したい内容

- 「超」大変形問題を
高精度かつロバストに解きたい.
- 複雑形状を四面体で解きたい.
- 微圧縮性が現れる材料も解きたい.
- 自動リメッシングも実現したい.
- 接触も扱いたい.



現状

精度・大変形ロバスト性・計算速度の三拍子が揃った四面体定式化が今だに確立されていない...

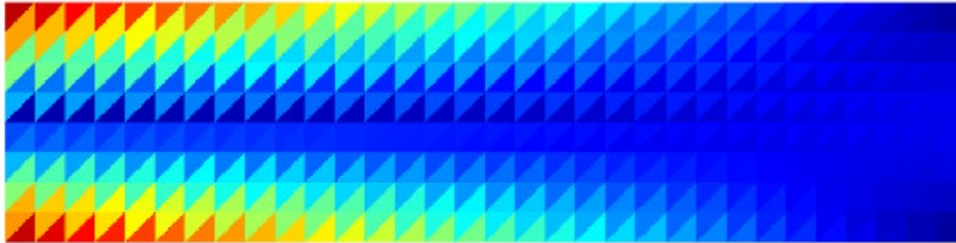


エッジ中心ひずみ平滑要素 (EC-SSE) の可能性

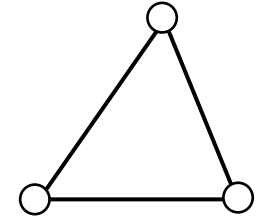
片持ち梁の曲げのMises応力分布比較 (3節点三角形メッシュ)

T. Jinsong et al., Euro. J. Mech. /A, v95, 2022.

FEM-T3



応力分布が階段状で低精度.
実は, せん断ロッキングも
起こしている.

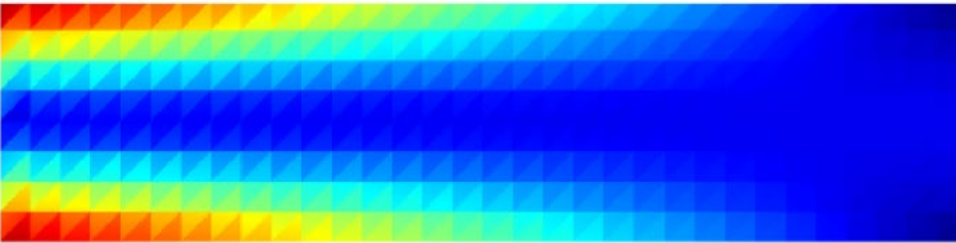


T3

ポアソン比は0.3

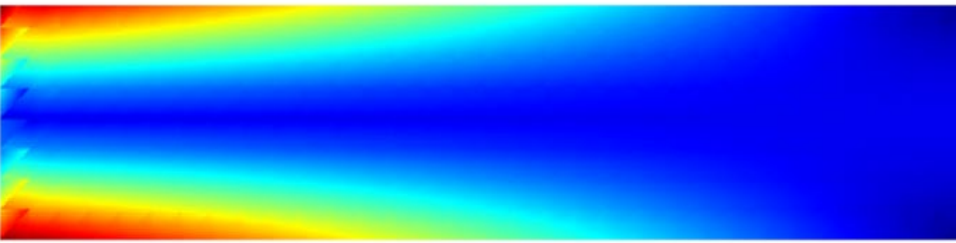
詳細は後述

SSE
Strain
Smoothing
Element

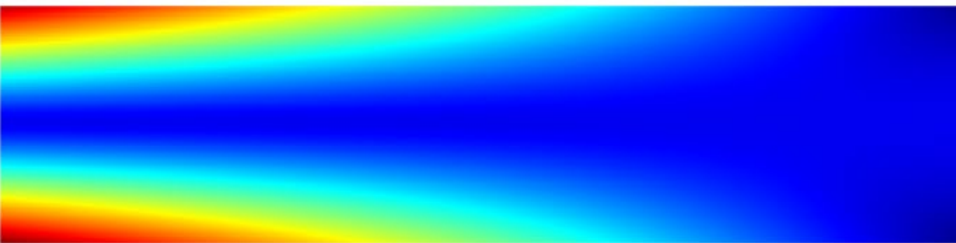


EC-SSE

Edge
Center-based
SSE

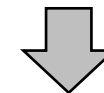


Analytic



- ひずみ/応力が要素内で線形分布なので高精度.
 - 更にEC-SSEではひずみ/応力の連続性もある.
 - せん断ロッキングなし.
- ただし, 微圧縮だと
- 体積ロッキングあり.
 - 圧力チェッカーあり.

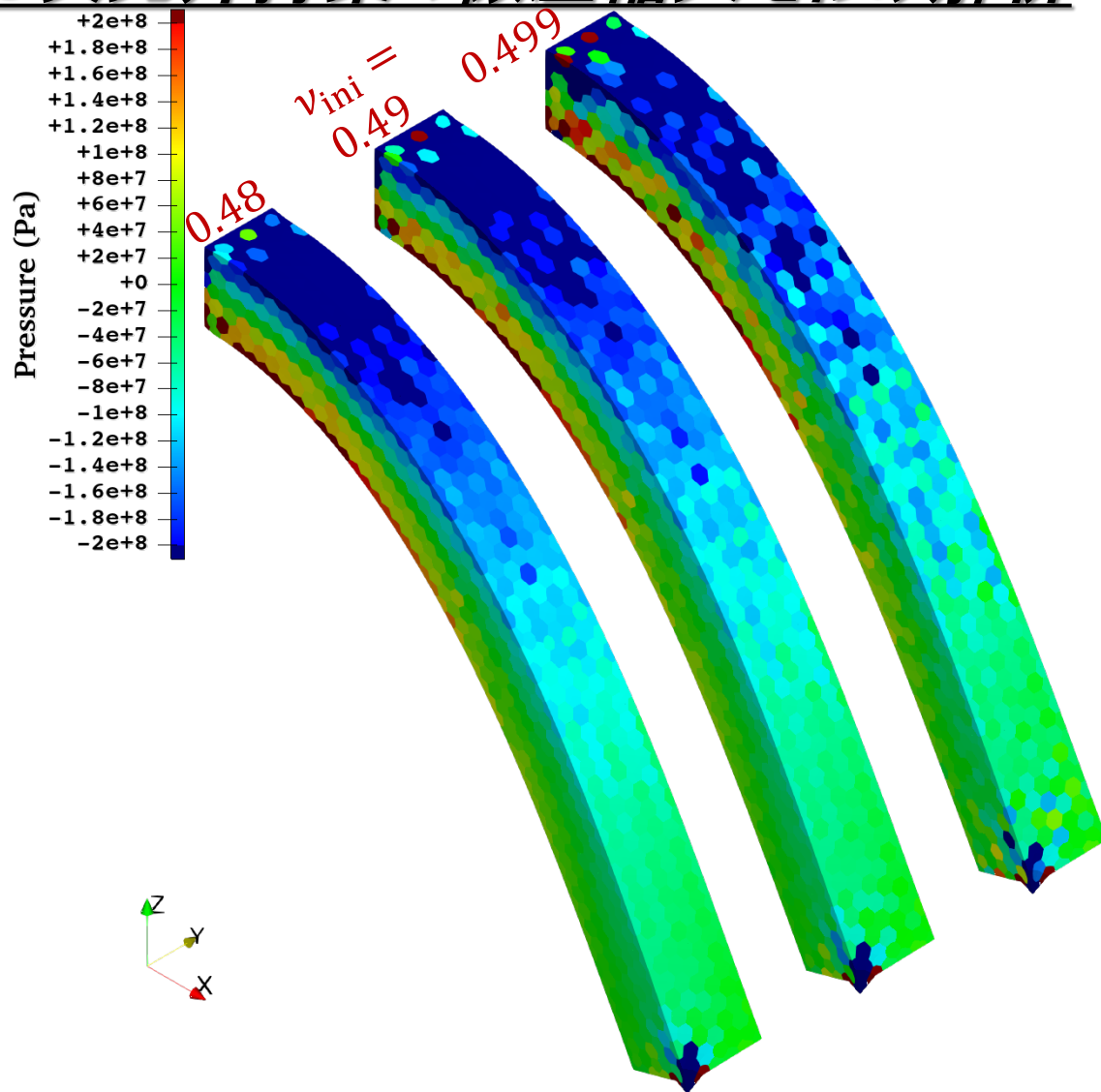
次世代のS-FEM
「S-FEM 2.0」
と呼ぶにふさわしい
飛躍的進歩



昨年, ポアソン比0.49までのゴム大変形に
拡張してみた ⇒ 旧 EC-SSE-SRI-T4

旧 EC-SSE-SRI-T4の性能

3次元片持梁の微圧縮大たわみ解析



課題	状況
精度	- せん断/体積ロッキングはないが、ポアソン比 $\nu = 0.49$でも圧力チェッカーボーディングを抑え切れてはいない. - 偏差応力の精度は超優秀.
大変形ロバスト性	問題なし.
計算時間	同一メッシュの場合, FEM-T4の約7倍(元のEC-SSEと同じ).

圧力チェッカーボーディングがあると...

- 圧力だけでなく, σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} の値も信用できなくなる.
- 特に大滑りの接触解析で接触不安定が起こる. などの問題が生じる.

つまり, 旧 EC-SSE-SRI-T4は
駄目とまでは言えないが
決定版の定式化と言うには弱い.

ゴム大変形用の次世代平滑化有限要素法(EC-SSE-SRI-T4)に唯一残る**圧力チェッカーボーディング**の問題を**低コストで抑制**する改良手法について検討を行う.

※今回は「**非整合な静水圧応力積分**」を用いる改良(詳細は後述)を試した.

発表目次:

- 手法: **新旧 EC-SSE-SRI-T4**の定式化の紹介
- 結果と考察: 解析例の紹介 と 計算コストの考察
- まとめ

手法

新旧 EC-SSE-SRI-T4の定式化の紹介

NS-FEMの定式化概要

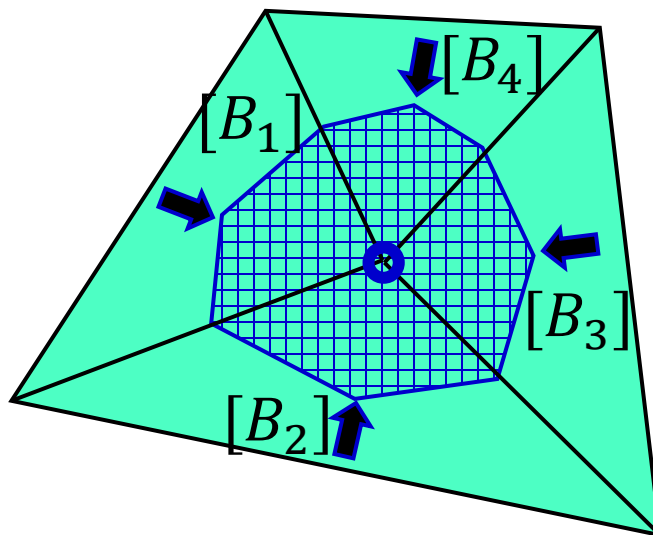
下図のような3節点三角形メッシュがあるとする.

- 各セルのひずみ-変位マトリックス $[B]$ を通常のFEMと同様に作る.
- 各ノードにて周辺セルの $[B]$ を集め, 集めた各セルの体積を重みとして $[B]$ を平均化し, ノード平滑化領域の $[^{\text{Node}}B]$ を作る.
- $[^{\text{Node}}B]$ を用いて各ノードのひずみ ε ・応力 σ ・節点内力 $\{f^{\text{int}}\}$ を計算する.

簡単のため
2次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します.

ガウス点が
各ノードに
あるイメージ

ひずみ分布は
各平滑化領域内で
一定



三角形/四面体メッシュで
せん断・体積ロッキングを
回避できるが,

圧力チェッカーボーディングは
残存してしまう,
疑似低エネルギーモード
(アワーグラスモードの類)
が現れてしまう.

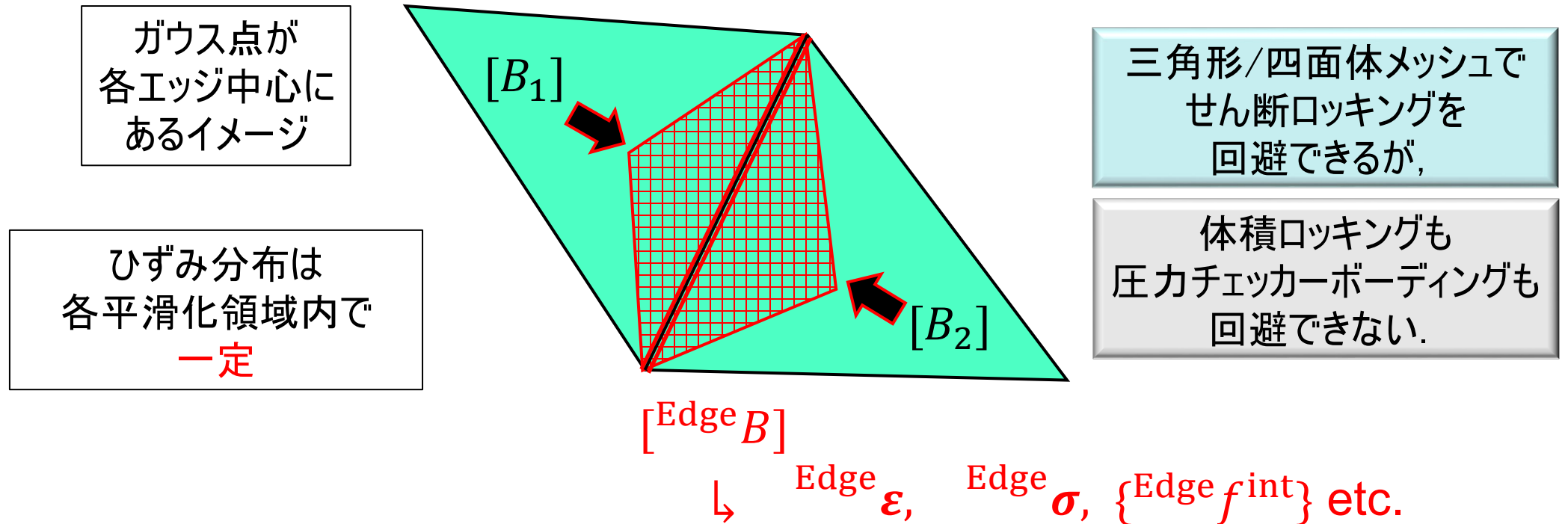
$[^{\text{Node}}B]$
↳ $\text{Node } \varepsilon, \text{ Node } \sigma, \{ \text{Node } f^{\text{int}} \} \text{ etc.}$

ES-FEMの定式化概要

下図のような3節点三角形メッシュがあるとする.

- 各セルのひずみ-変位マトリックス $[B]$ を通常のFEMと同様に作る.
- 各エッジにて周辺セルの $[B]$ を集め, 集めた各セルの体積を重みとして $[B]$ を平均化し, エッジ平滑化領域の $[^{\text{Edge}}B]$ を作る.
- $[^{\text{Edge}}B]$ を用いて各エッジのひずみ ε ・応力 σ ・節点内力 $\{f^{\text{int}}\}$ を計算する.

簡単のため
2次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します.



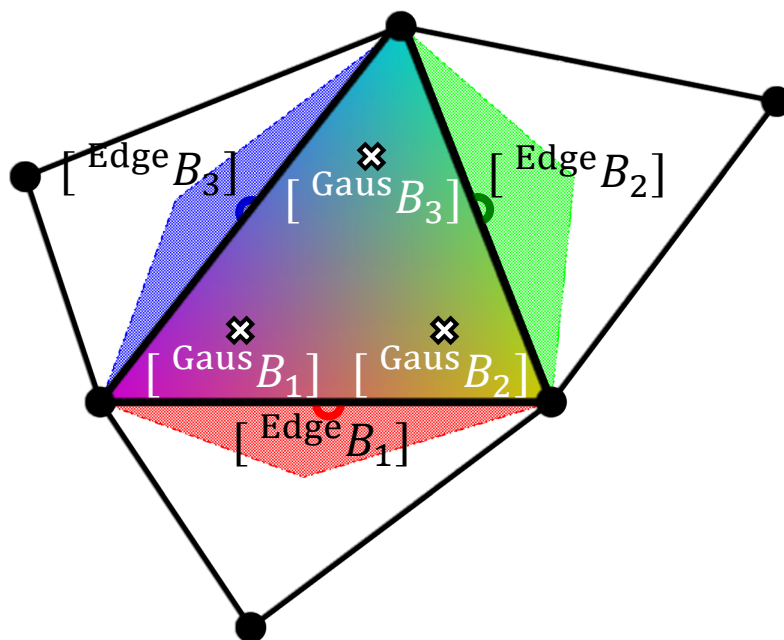
EC-SSEの定式化概要

- ES-FEMと同じ手順で各エッジの $[Edge B]$ を作る.
- $[Edge B]$ は各エッジ中心の物で, 各セル内で線形分布だと考える.
- $[Edge B]$ をセル内の3ガウス点へと外挿して $[Gaus B]$ を作る.
- $[Gaus B]$ を用いて各ガウス点のひずみ・応力を計算し, 三角形2次要素と同様にガウスの3点積分で節点内力を計算する.

簡単のため
2次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します.

ひずみ平滑化を
2回行って
ガウス点で
ひずみ/応力を
評価・積分する

ひずみ分布は
各セル内で**線形**
かつ
エッジ中心で連続



三角形/四面体メッシュで
せん断ロッキングを
回避できる上に,
ひずみ/応力の
メッシュ収束が極めて速い

体積ロッキングも
圧力チェッカーボーディングも
回避できない.

旧 EC-SSE-SRIの定式化概要

微圧縮材料に対応するため、EC-SSEに選択的低減積分(SRI)を適用.

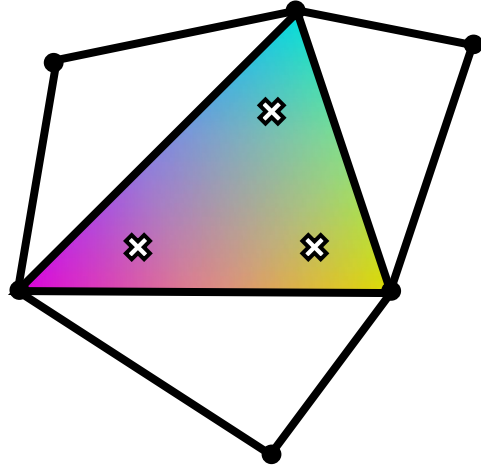
簡単のため
2次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します.

(1) EC-SSEによる各ガウス点での
偏差ひずみの計算

(3) NS-FEMによる各節点での
体積ひずみの計算

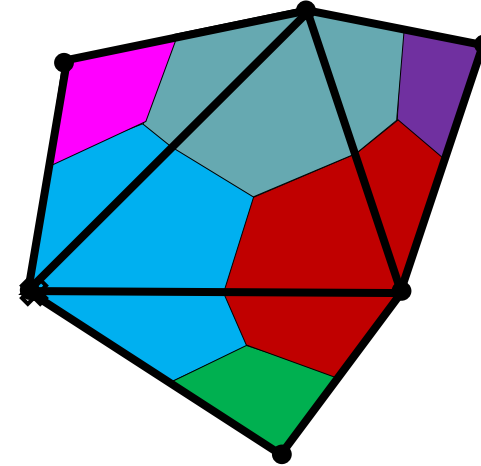
改良
不要

偏差
成分



体積
成分

改良
必要



(2) 各ガウス点での偏差応力と
その節点内力寄与 $\{f_{dev}^{int}\}$ の計算

(4) 各節点での静水圧応力と
その節点内力寄与 $\{f_{hyd}^{int}\}$ の計算

選択的低減積分
(SRI)

- せん断ロッキングの回避
- せん断応力精度の向上

- 体積ロッキングの回避
- 圧力チェッカーボーディングの残存

(5) 節点内力 $\{f^{int}\}$ の組み立て

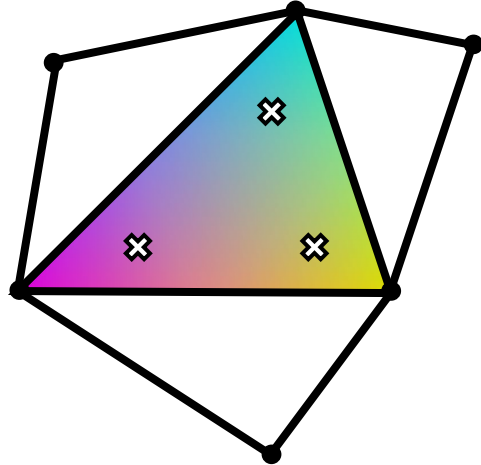
新 EC-SSE-SRIの定式化概要

微圧縮材料に対応するため、EC-SSEに選択的低減積分(SRI)を適用.

簡単のため
2次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します.

(1) EC-SSEによる各ガウス点での
偏差ひずみの計算

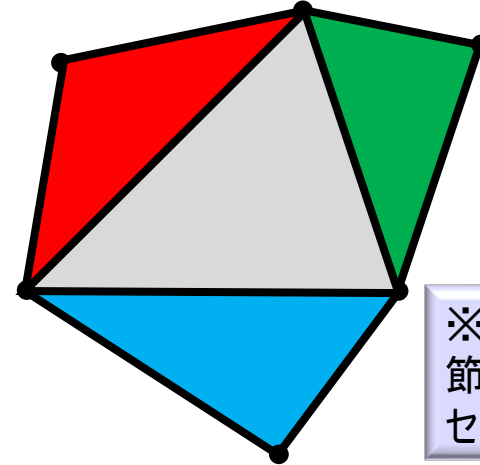
偏差
成分



(2) 各ガウス点での偏差応力と
その節点内力寄与 $\{f_{dev}^{int}\}$ の計算

(3) 二重平滑を経た各セルでの
体積ひずみの計算

体積
成分



※二重平滑
節点でのひずみ平滑(NS-FEM)の後に、
セルでのひずみ平滑(NS-FEM⁻¹)を行う.

(4) 各セルでの静水圧応力と
その節点内力寄与 $\{f_{hyd}^{int}\}$ の計算

選択的低減積分
(SRI)

- せん断ロッキングの回避
- せん断応力精度の向上

- 体積ロッキングの回避
- 圧力チェッカーボーディング
のより強い抑制

(5) 節点内力 $\{f^{int}\}$ の組み立て

新 EC-SSE-SRIの応力積分

■ あるセル c における静水圧応力積分(1点積分)の式:

静水圧応力の
節点内力寄与

標準的な
FEM-T4の
Bマトリックス

標準的な
FEM-T4の
セル体積

$$\{\text{Cell}_c f_{\text{hyd}}^{\text{int}}\} = [\text{Cell}_c B]^T \{\text{Cell}_c \tilde{\sigma}_{\text{hyd}}\} \text{Cell}_c V$$

二重平滑を経たひずみの
体積成分 $\text{Cell}_c \tilde{\epsilon}_{\text{vol}}$ から
算出された静水圧応力

【お詫び】

予稿集では誤って
「 $\text{Cell}_c \tilde{v}$ 」と記載されて
います。お詫びして
訂正いたします。

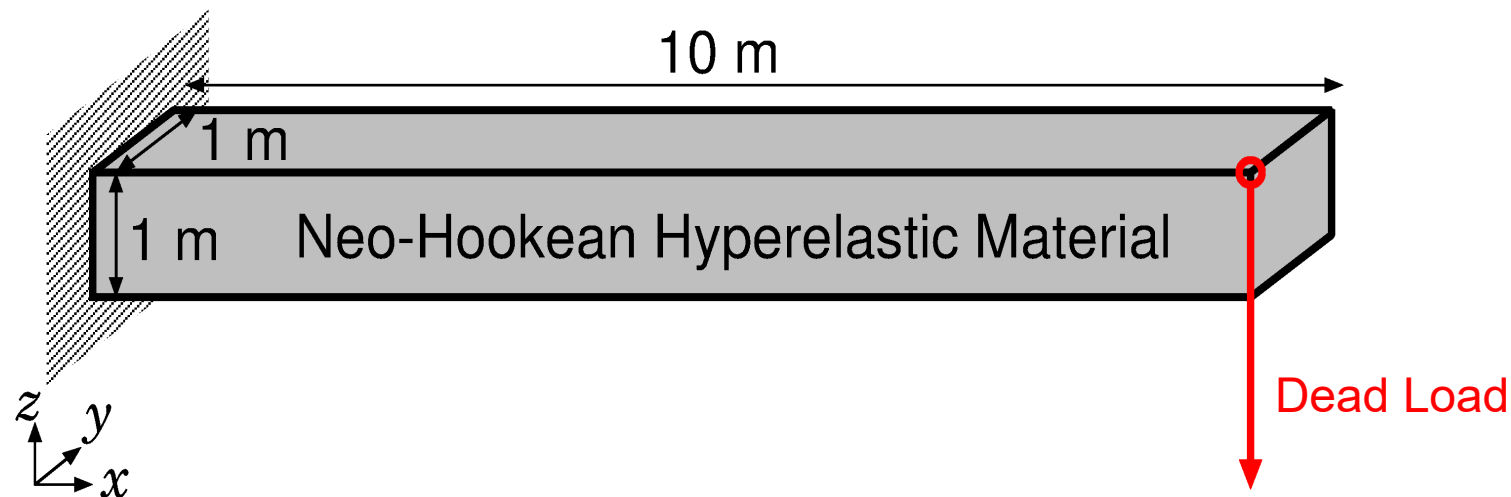
- $[\text{Cell}_c B]$ を用いることで節点内力の分配範囲が狭くなる(左辺ベクトルは4節点分のみ)。
- 他方, $\{\text{Cell}_c \tilde{\sigma}_{\text{hyd}}\}$ はセル c 周辺の多数のセルから算出される。
- 簡単に言うと「**広く集めて, 狭く配る**」静水圧応力積分で圧力チェッカーボーディングを抑え込む。
- デメリットとして, **非整合な応力積分**により動解析時のエネルギー発散が起きる。
($[K] = [B]^T [D] [B]$ の形式でなくなるにより正定値性が失われる。) **静解析なら大丈夫。**

結果と考察

解析例の紹介 と 計算コストの考察

片持ち梁の曲げ解析

概要



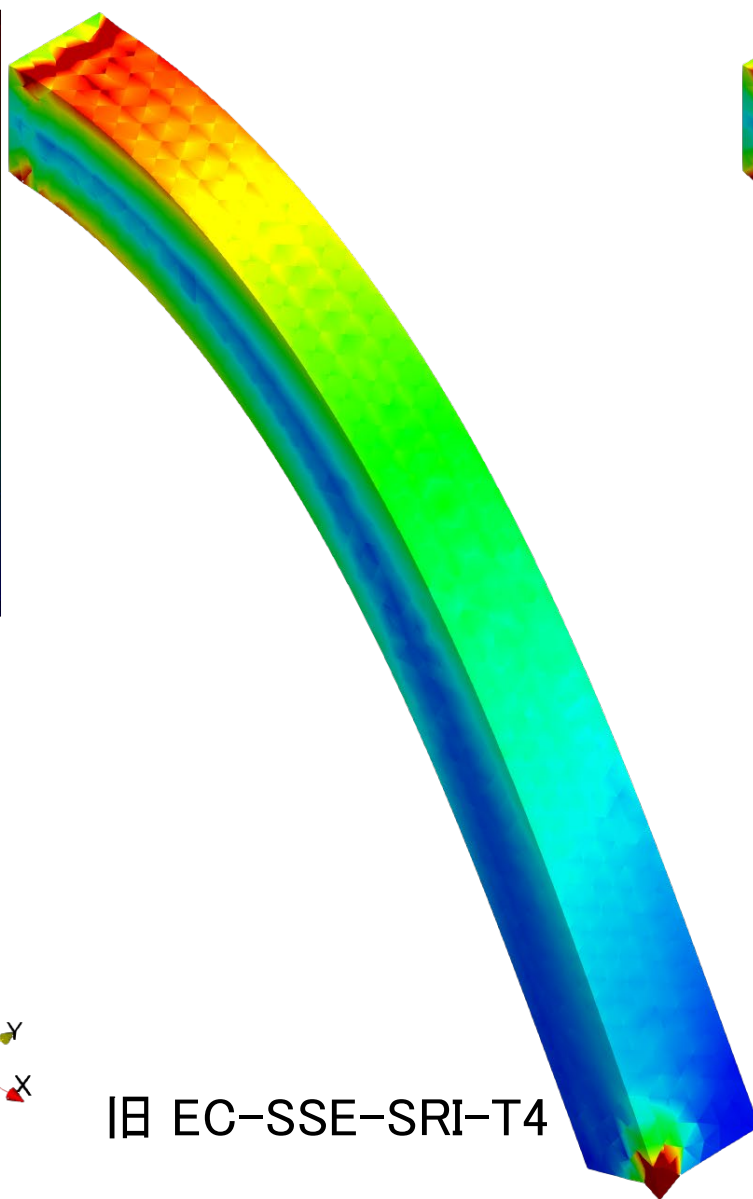
- 10 m x 1 m x 1 m の片持ち梁の先端に死荷重.
- Neo-Hook超弾性体 ($E_{ini} = 6$ GPa, $\nu_{ini} = 0.49$)
- 先端の最終たわみが約6.5 mの大たわみ問題.

片持ち梁の曲げ解析

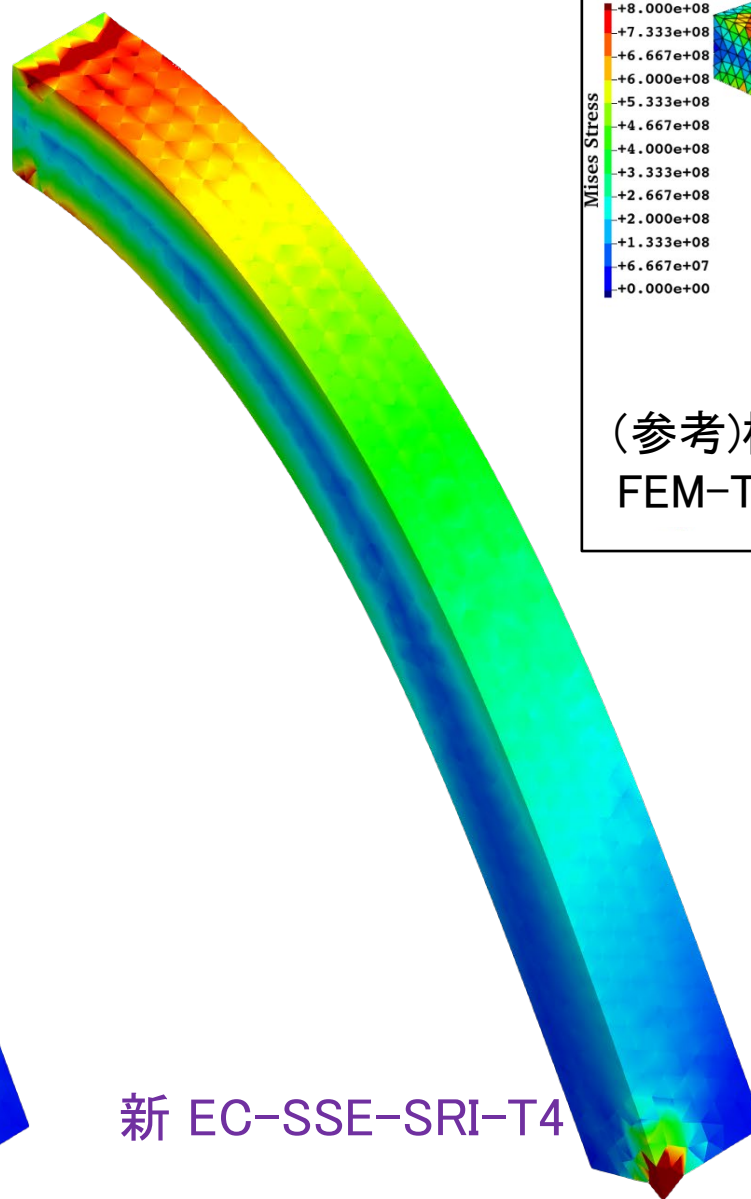
Mises応力 解析結果 (最終状態)

Mises Stress (Pa)

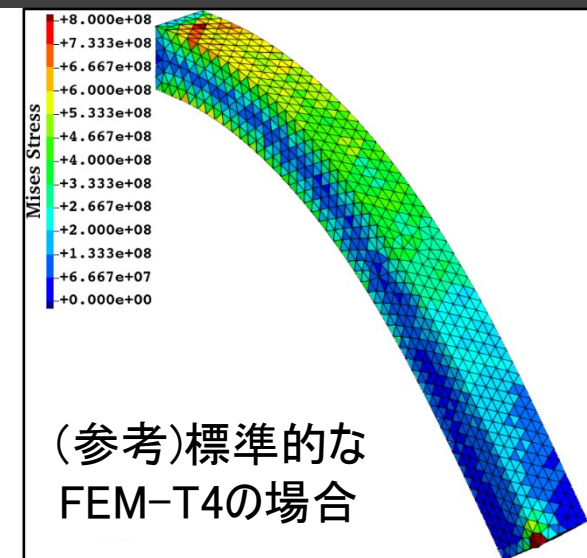
+8e+8
+7.5e+8
+7e+8
+6.5e+8
+6e+8
+5.5e+8
+5e+8
+4.5e+8
+4e+8
+3.5e+8
+3e+8
+2.5e+8
+2e+8
+1.5e+8
+1e+8
+5e+7
+0



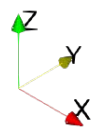
旧 EC-SSE-SRI-T4



新 EC-SSE-SRI-T4



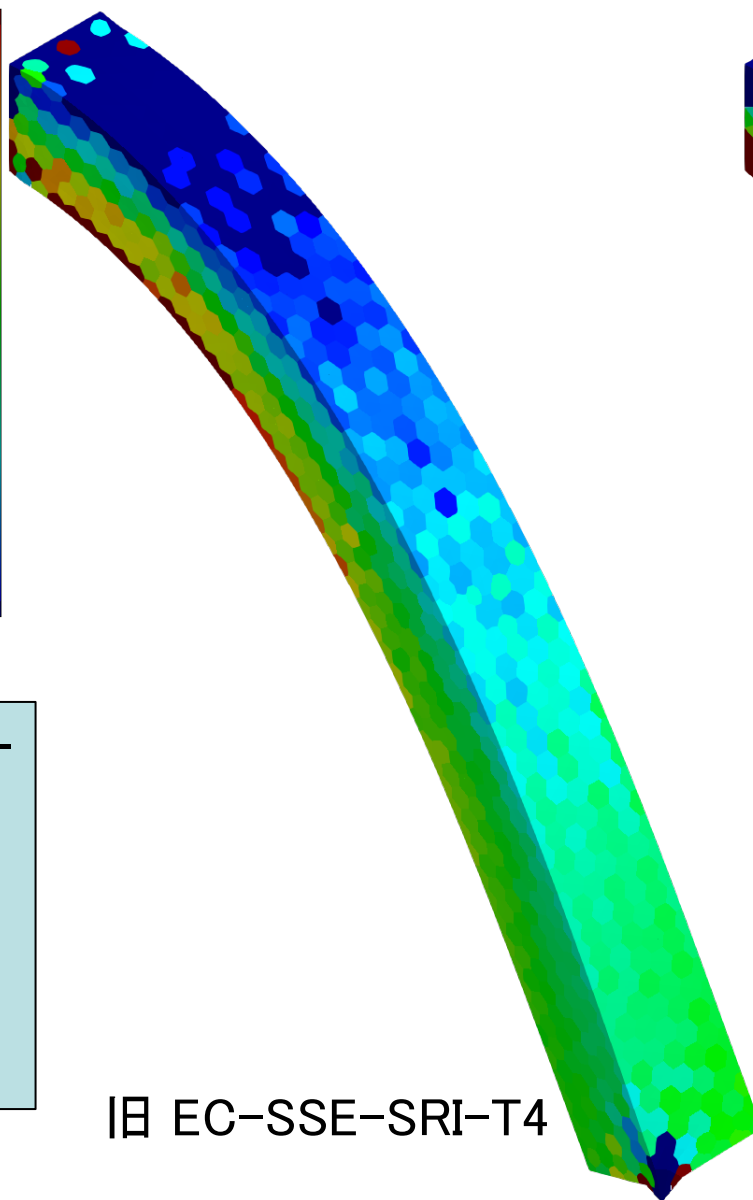
- 両者共に綺麗で, ほとんど違いはない.
- 節点変位・反力にも問題なし(詳細略).



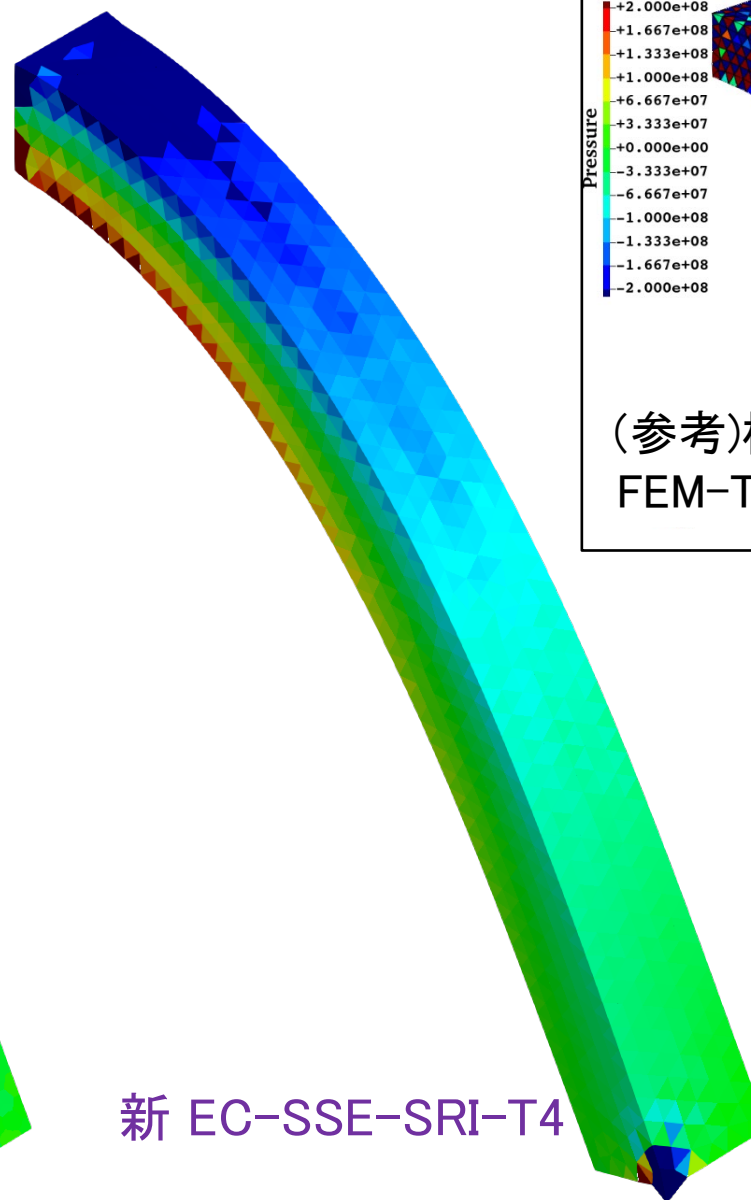
圧力 解析結果 (最終状態)

Pressure (Pa)

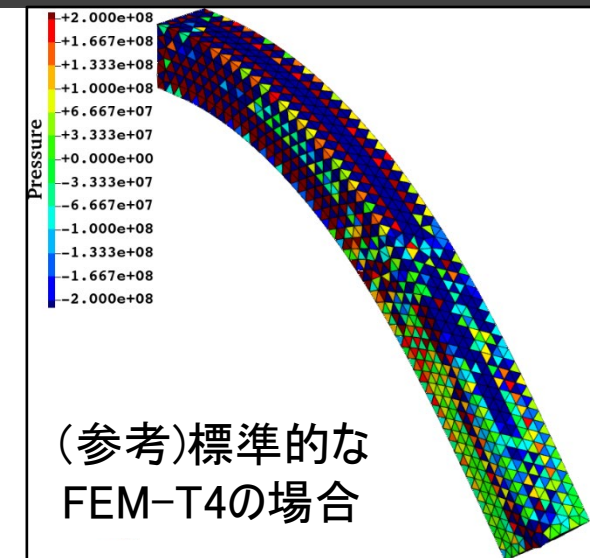
+2e+8
+1.8e+8
+1.6e+8
+1.4e+8
+1.2e+8
+1e+8
+8e+7
+6e+7
+4e+7
+2e+7
+0
-2e+7
-4e+7
-6e+7
-8e+7
-1e+8
-1.2e+8
-1.4e+8
-1.6e+8
-1.8e+8
-2e+8



旧 EC-SSE-SRI-T4

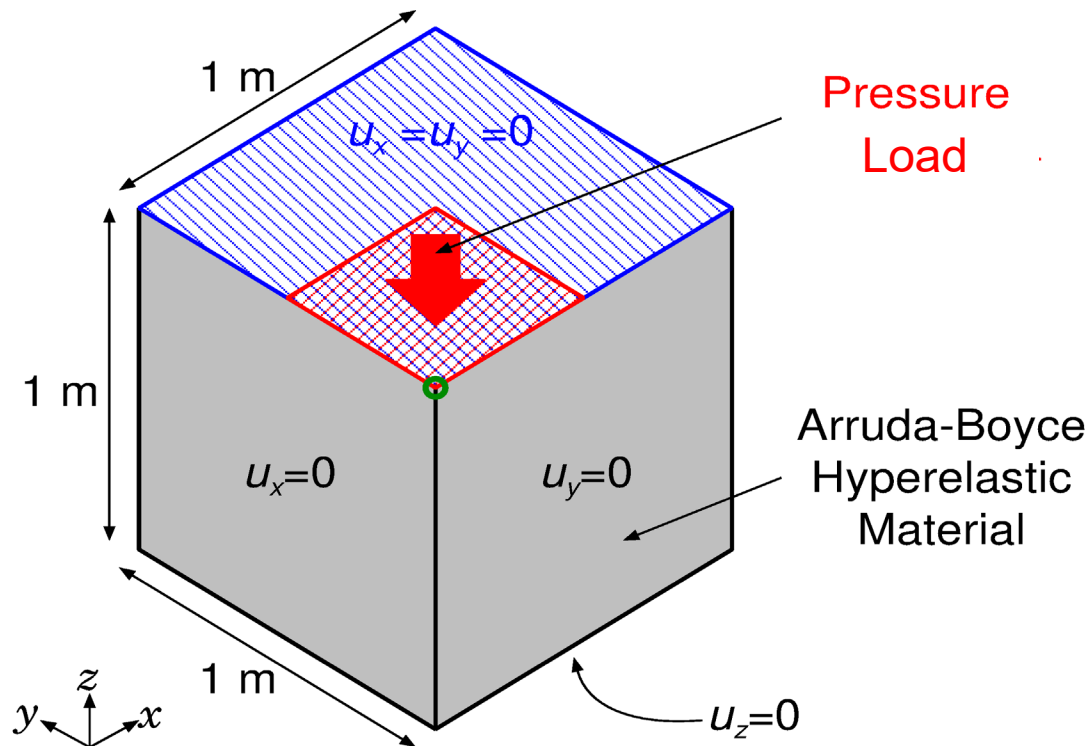


新 EC-SSE-SRI-T4



- 旧定式化では圧力チェッカーボーディングが若干残っている.
- 新定式化ではほぼ気にならない程に圧力チェッカーボーディングが抑制できている!!

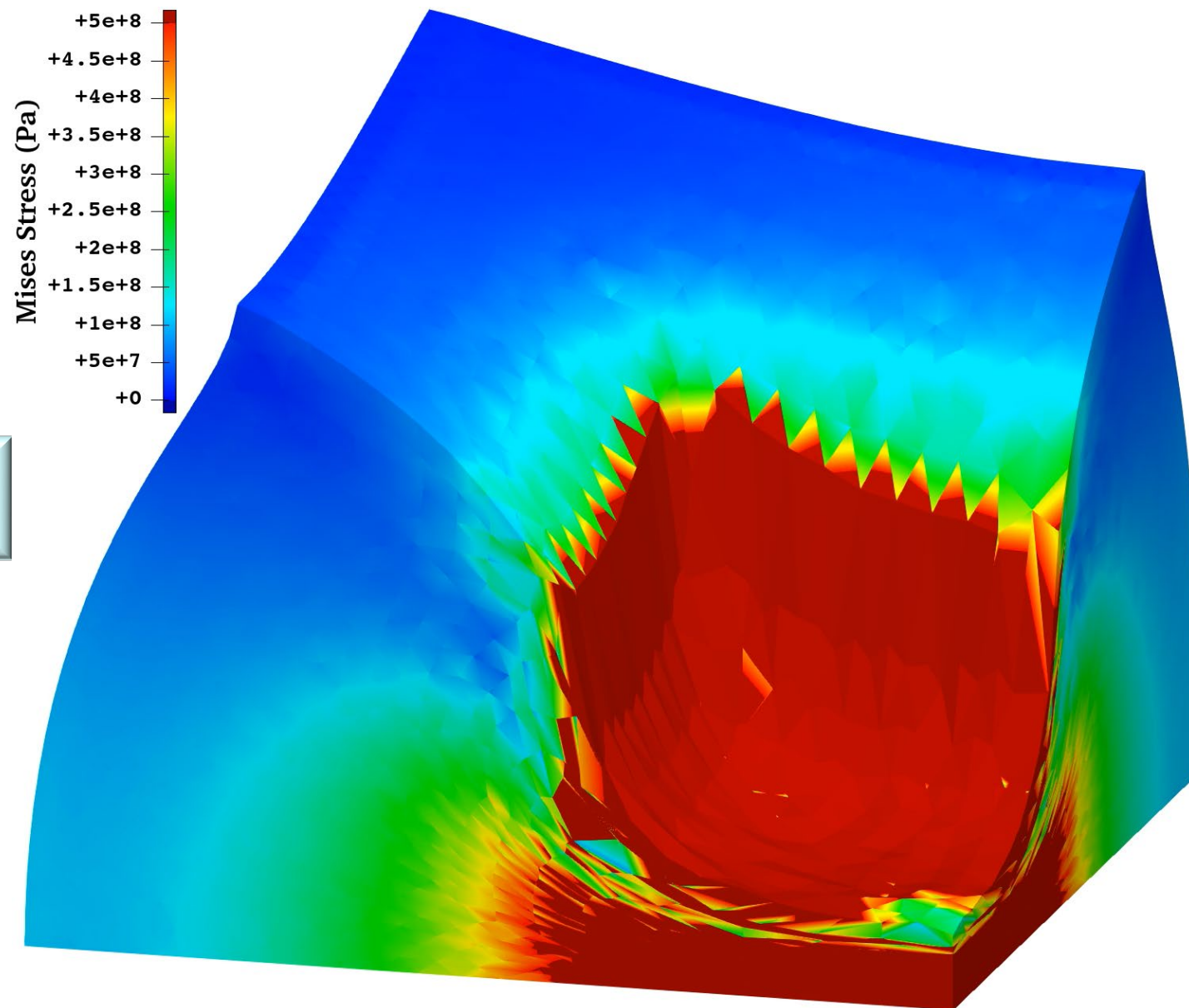
概要



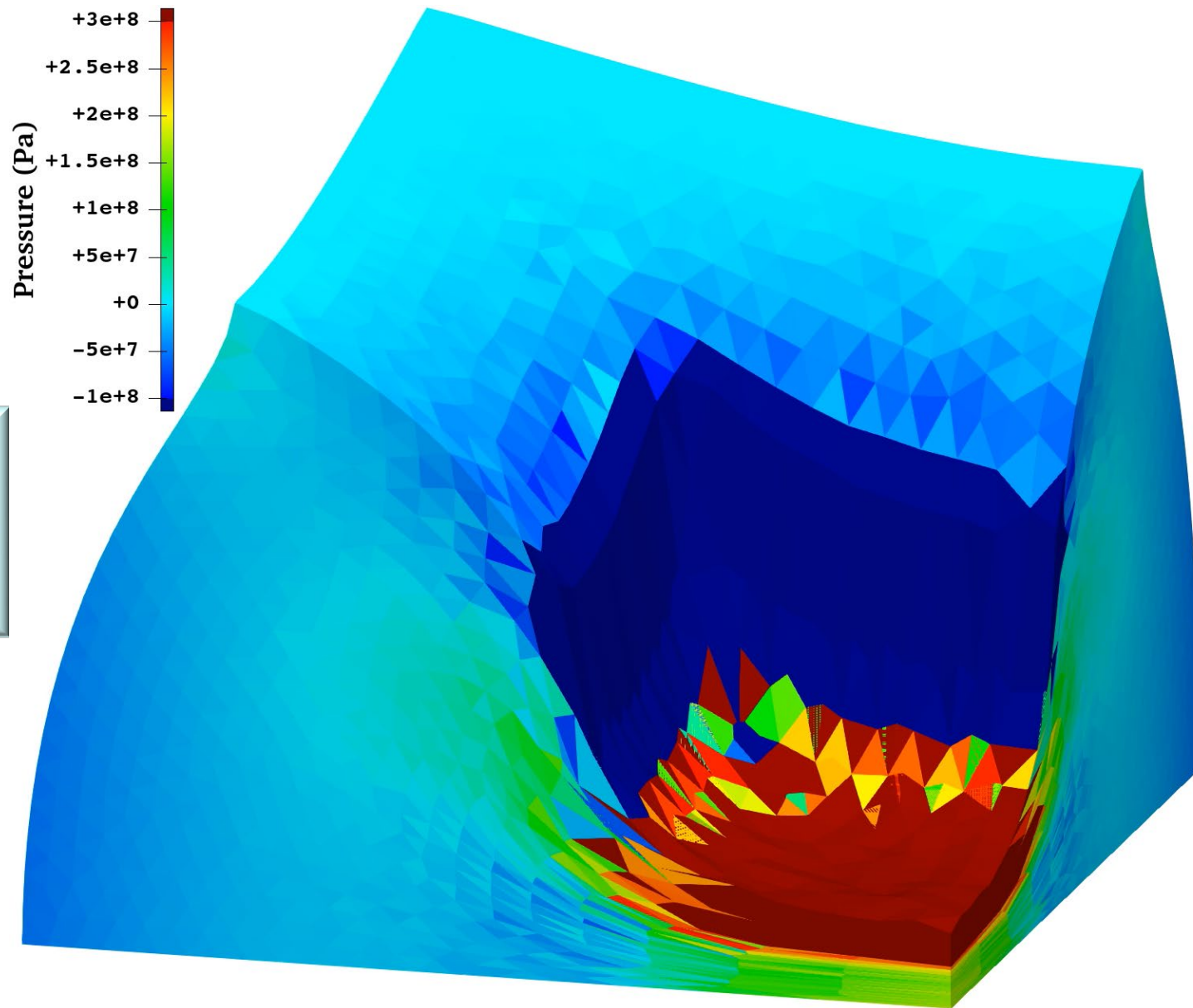
- 1/4モデル.
- Arruda-Boyce超弾性体 ($\nu_{ini} = 0.49$).
- 上面の1/4の領域に圧力を加えて押し込む.

新 EC-SSE-SRI-T4 Mises応力解析結果

Mises応力に大きな問題はなく
大変形ロバスト性もそこそこ.

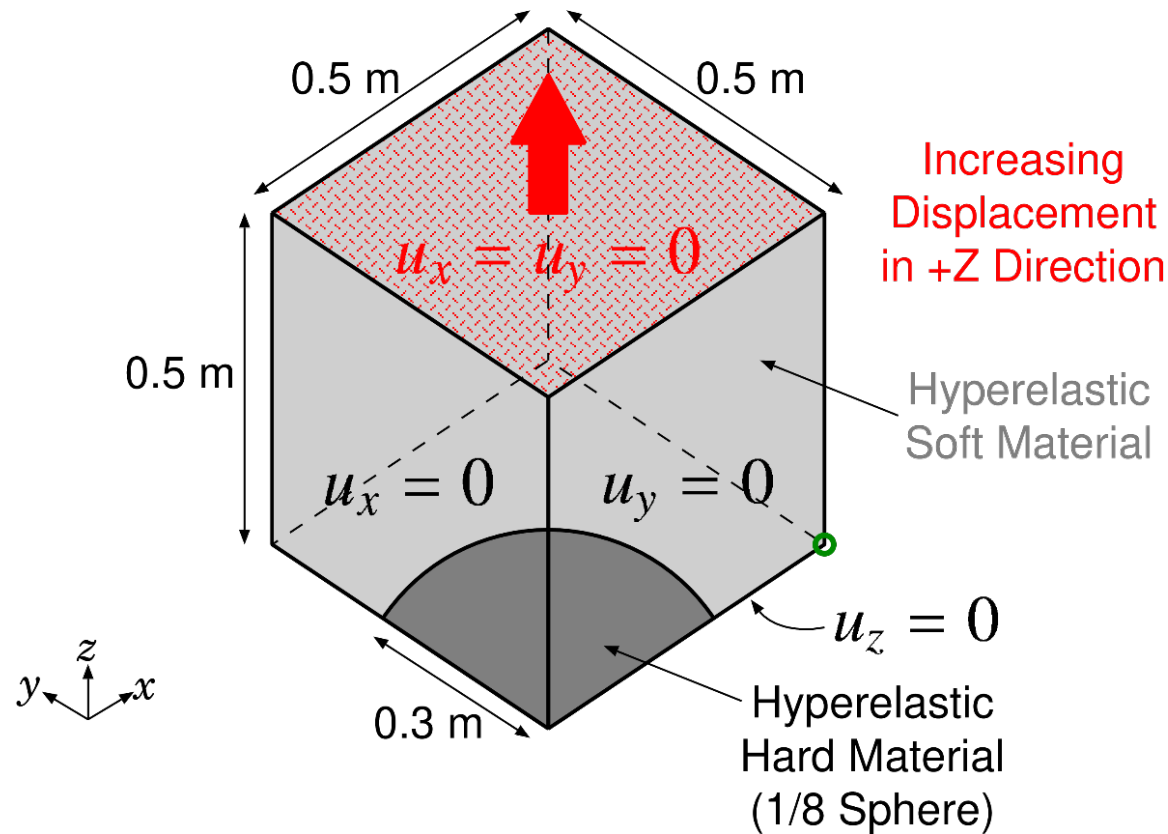


新 EC-SSE-SRI-T4 圧力解析結果



最終状態の分布だと
チェッカーボードが目立つが、
途中までは妥当な分布を
示している。

概要



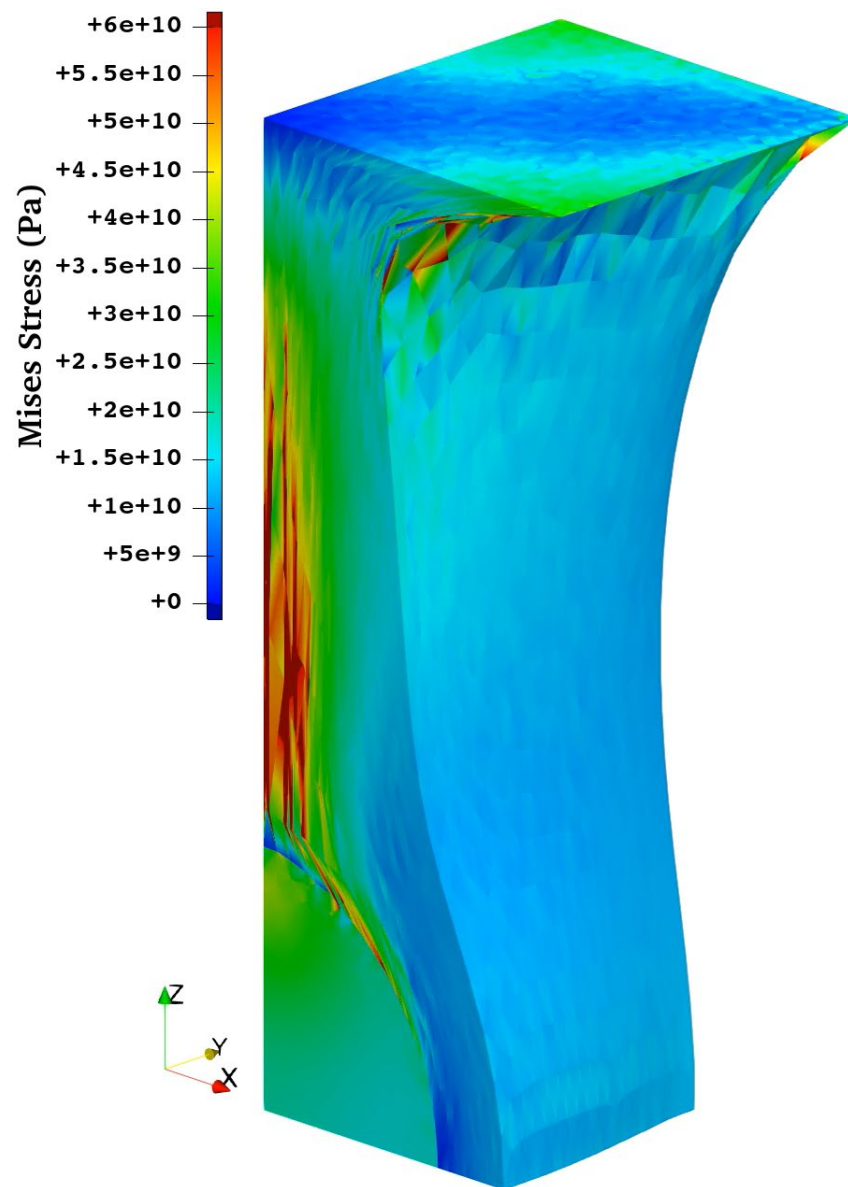
■ 1/8モデル

■ 鉄ファイラー: Neo-Hook超弾性体 ($E_{ini} = 260 \text{ GPa}$, $\nu_{ini} = 0.3$)

■ ゴム: Neo-Hook超弾性体 ($E_{ini} = 6 \text{ GPa}$, $\nu_{ini} = 0.49$)

新 EC-SSE-SRI-T4 Mises応力解析結果

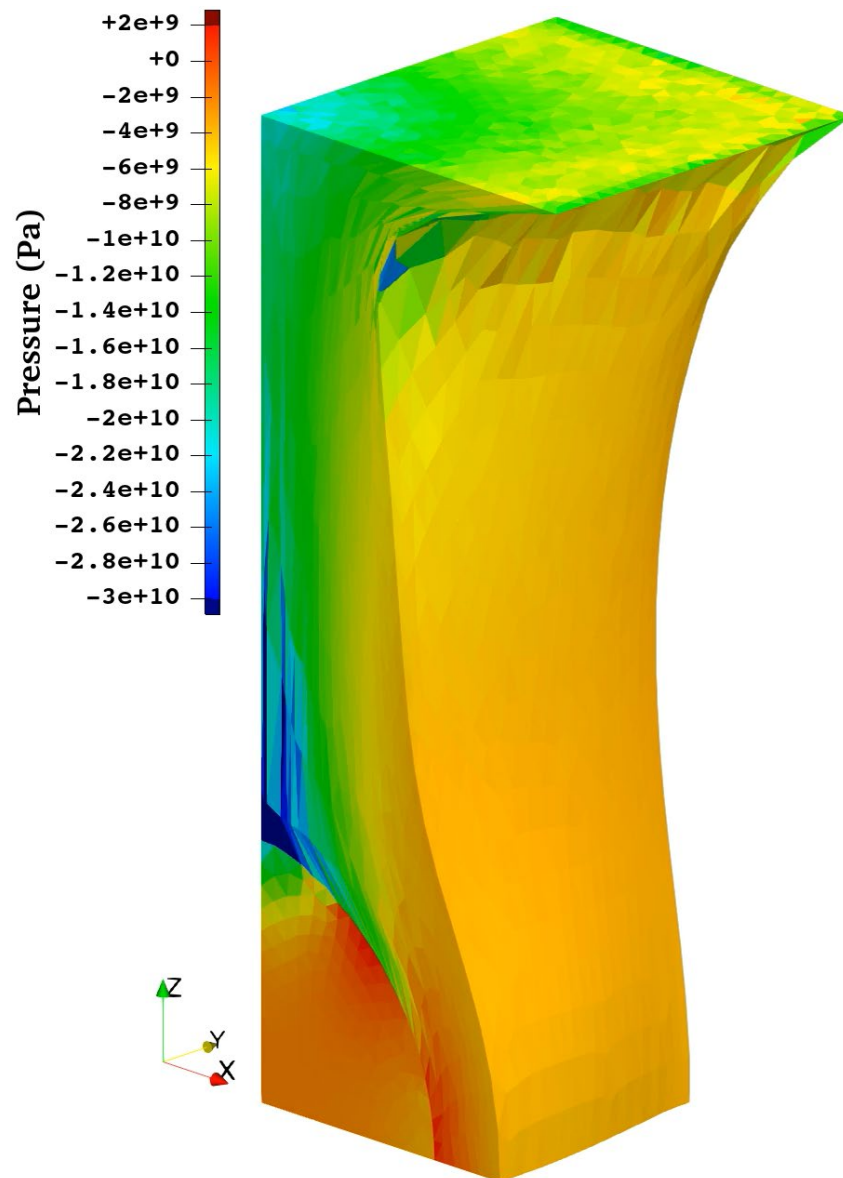
188%公称引張
で収束困難



Mises応力分布に
問題はなく，実用
上十分な大変形口
バスト性がある。

新 EC-SSE-SRI-T4 圧力解析結果

188%公称引張
で収束困難



鉄フィラー部のみならず
ゴム部でも綺麗な圧力
分布を示しており、圧力
チェッカーボーディングは
ほとんど見られない。

計算時間に関する考察

- 陰解法の計算時間の大部分は剛性方程式を解くことに費やされるため、剛性マトリックス $[K]$ のサイズが計算時間に直結する。
- S-FEMファミリーは純粋な変位型の定式化なので、剛性マトリックス $[K]$ の行数/列数(自由度の数 N)はFEM-T4と全く同じ。
- 要素をまたぐ歪み平滑化を繰り返す毎に剛性マトリックス $[K]$ のバンド幅は広がる。

定式化	$[K]$ のバンド幅	対FEM-T4比
FEM-T4	約14節点×3自由度	1 倍
FEM-T10	約28節点×3自由度	約2倍
ES-FEM-T4	約45節点×3自由度	約3倍
NS-FEM-T4	約60節点×3自由度	約4倍
EC-SSE-T4, 新旧 EC-SSE-T4-SRI	約94節点×3自由度	約7倍

計算時間は元々のEC-SSEから増加しない。

まとめ

新 EC-SSE-SRI-T4のまとめ

- ゴム大変形用の次世代平滑化有限要素法である「EC-SSE-SRI-T4」に対し、**圧力チェッカーボーディング**を低減させる新手法を提案した.
- **ポアソン比0.49**の微圧縮問題において、体積成分計算において**2回の平滑化＋非整合な応力積分**を行うことで**圧力チェッカーボーディング**がほぼ抑制されることを確認した.
- 同一メッシュを用いた際の計算時間は**FEM-T4の約7倍**に抑えられている.
- ポアソン比を0.4999まで大きくすると**疑似低エネルギーモード**の様な不安定が生じ、大変形ロバスト性が低下した. 従って、提案手法は**ポアソン比0.49**までの使用に制限される.

もうコレで良くないですか？ 実用化のご相談をお待ちしています.

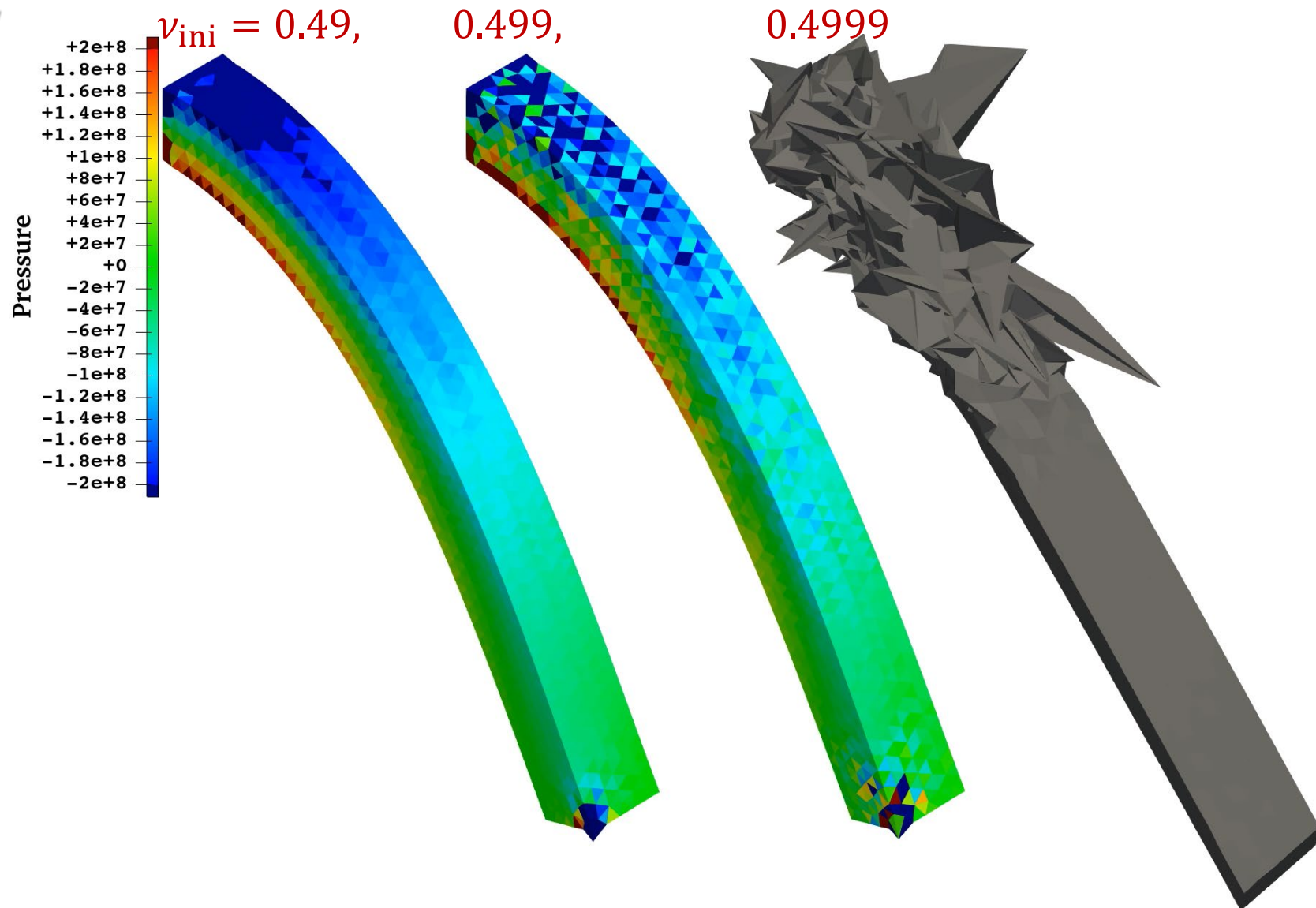
ご清聴ありがとうございました.

付録

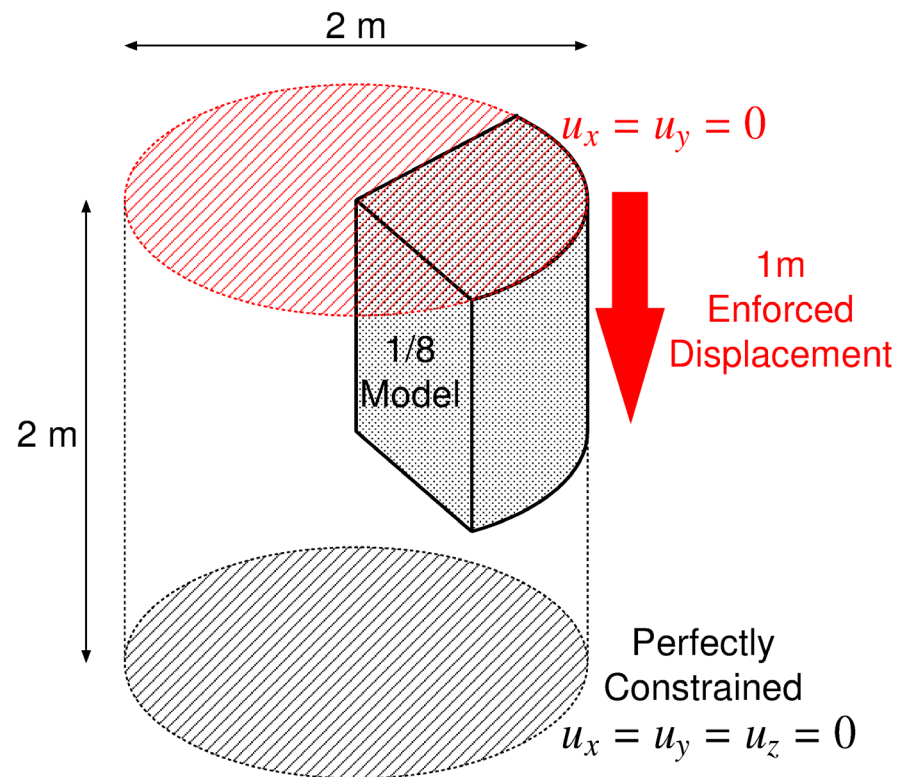
新 EC-SSE-SRI-T4 で初期ポアソン比を 0.5に近づけた場合の 圧力解析結果 (最終状態)

- 0.499なら圧力チェッカーはあるが完走する.
- 0.4999にすると早期収束困難に陥った.
- 疑似低エネルギーモードの類だと推定されるが、詳しい発生原因は不明.
- なお、旧定式化では早期収束困難は起こらない.

提案手法は初期ポアソン比
0.49以下のみを対象とする.



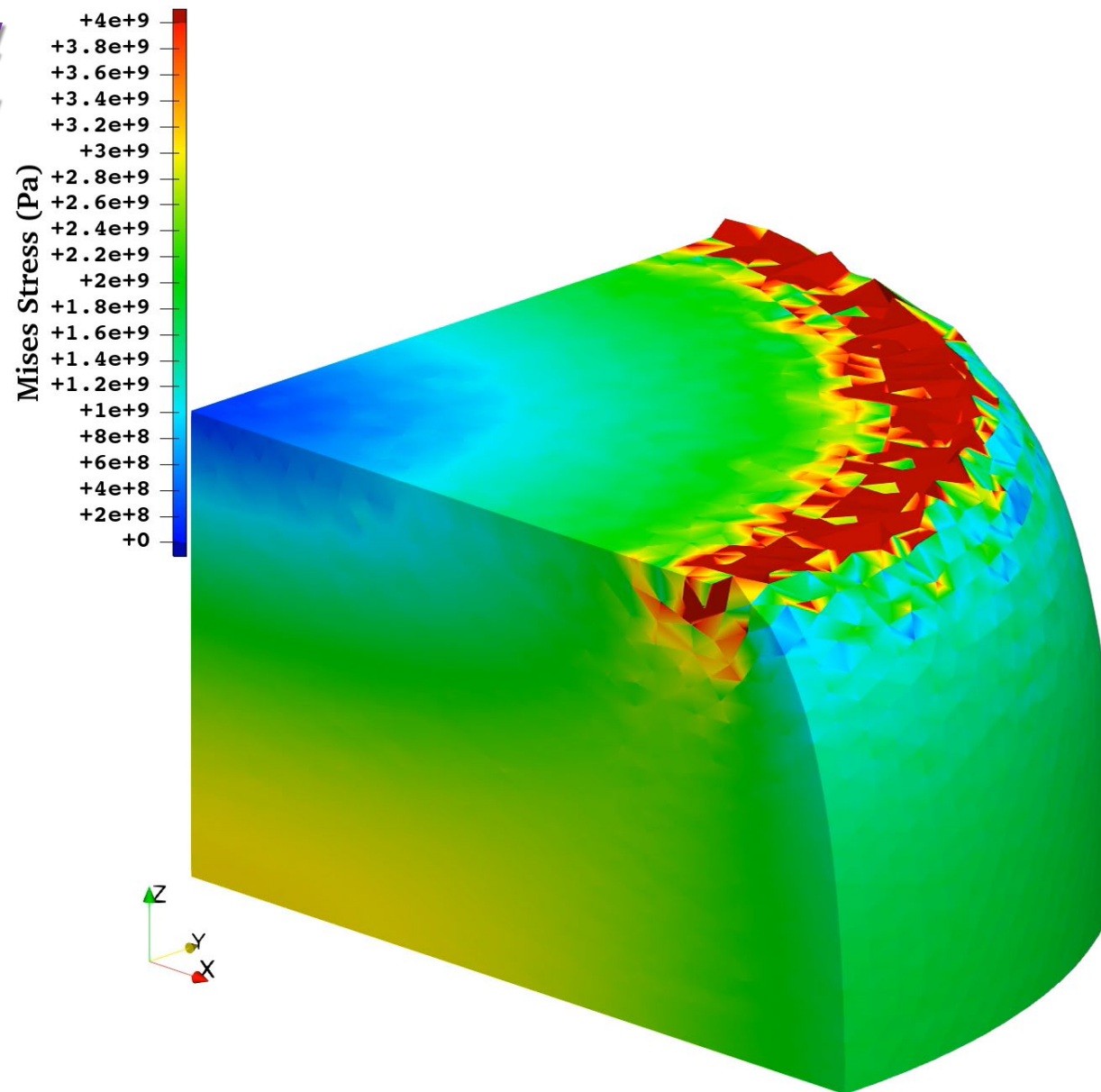
概要



- 上面を面内拘束し軸方向に下向き強制変位.
- Neo-Hook超弾性体 ($E_{ini} = 6 \text{ GPa}$, $\nu_{ini} = 0.49$)

新 EC-SSE-SRI-T4 Mises応力解析結果

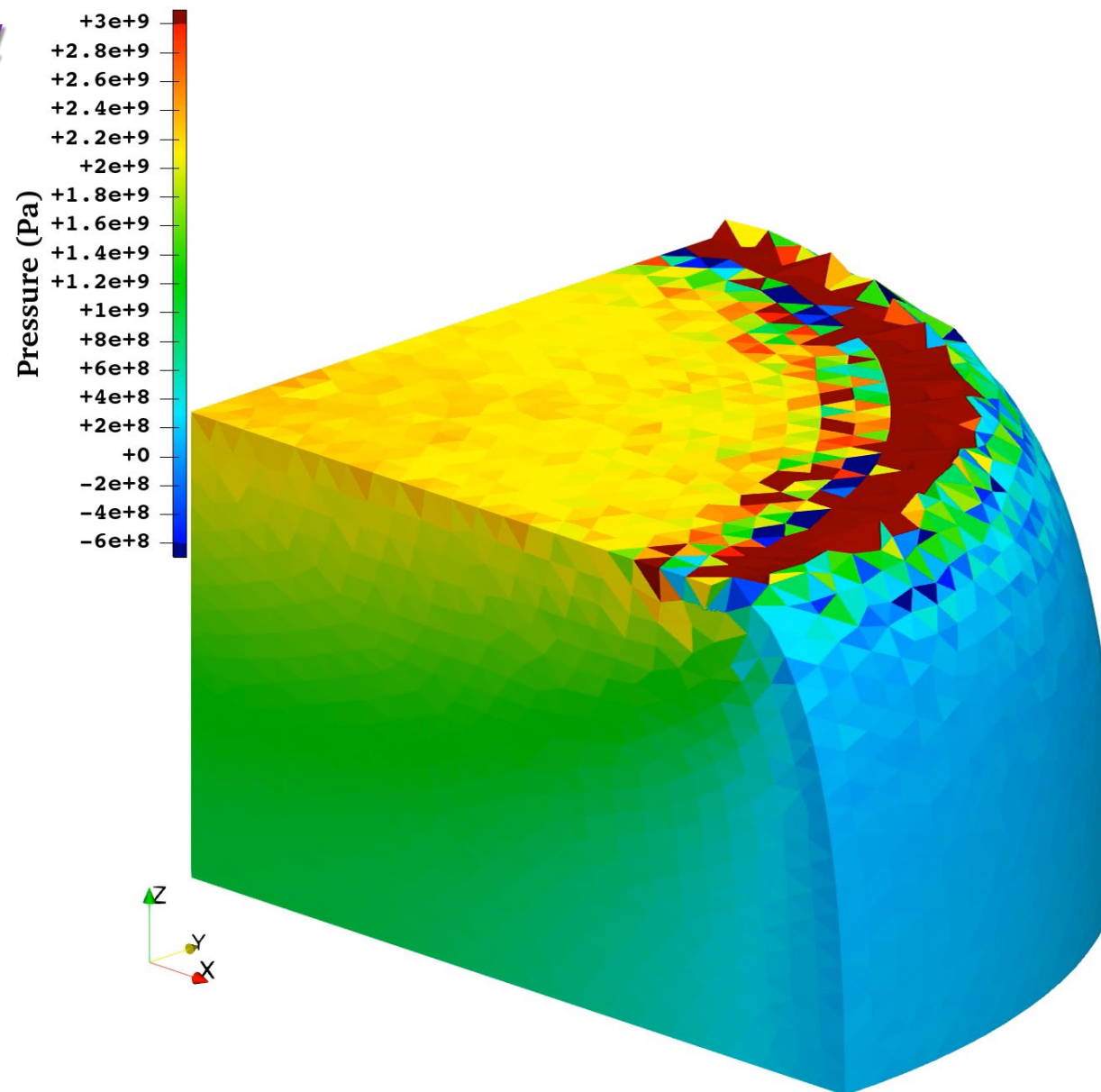
33%公称圧縮
で収束困難



Mises応力分布に問題はなく
大変形ロバスト性もそこそこ.

新 EC-SSE-SRI-T4 圧力解析結果

33%公称圧縮
で収束困難



縁周辺(応力特異点)
数セルには振動が見られる
が、その他領域では圧力
チェッカーボーディングの影響
は小さい。