

低コストで圧力チェッカーボーディングを抑制する 改良型 4 節点四面体エッジベース平滑化有限要素法を用いた 微圧縮大変形解析化有限要素法

大西 有希（東京科学大学）

研究背景

実現したい内容

- 「超」大変形問題をFEMで
速くロバストかつ正確に解きたい.
- 複雑形状を四面体で解きたい.
- 微圧縮性が現れる材料も解きたい.
- 自動リメッシングも実現したい.
- 接触も扱いたい.

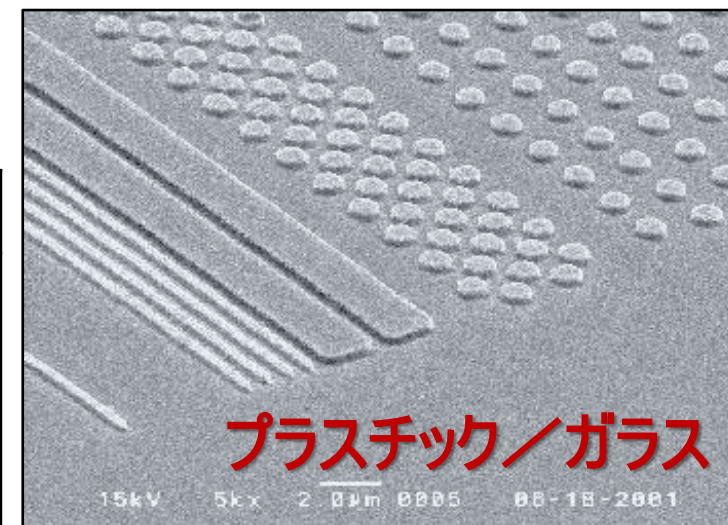
現状

計算速度・大変形ロバスト性・精度
の三拍子が揃った四面体定式化が
まだ確立されていない...



精度の問題

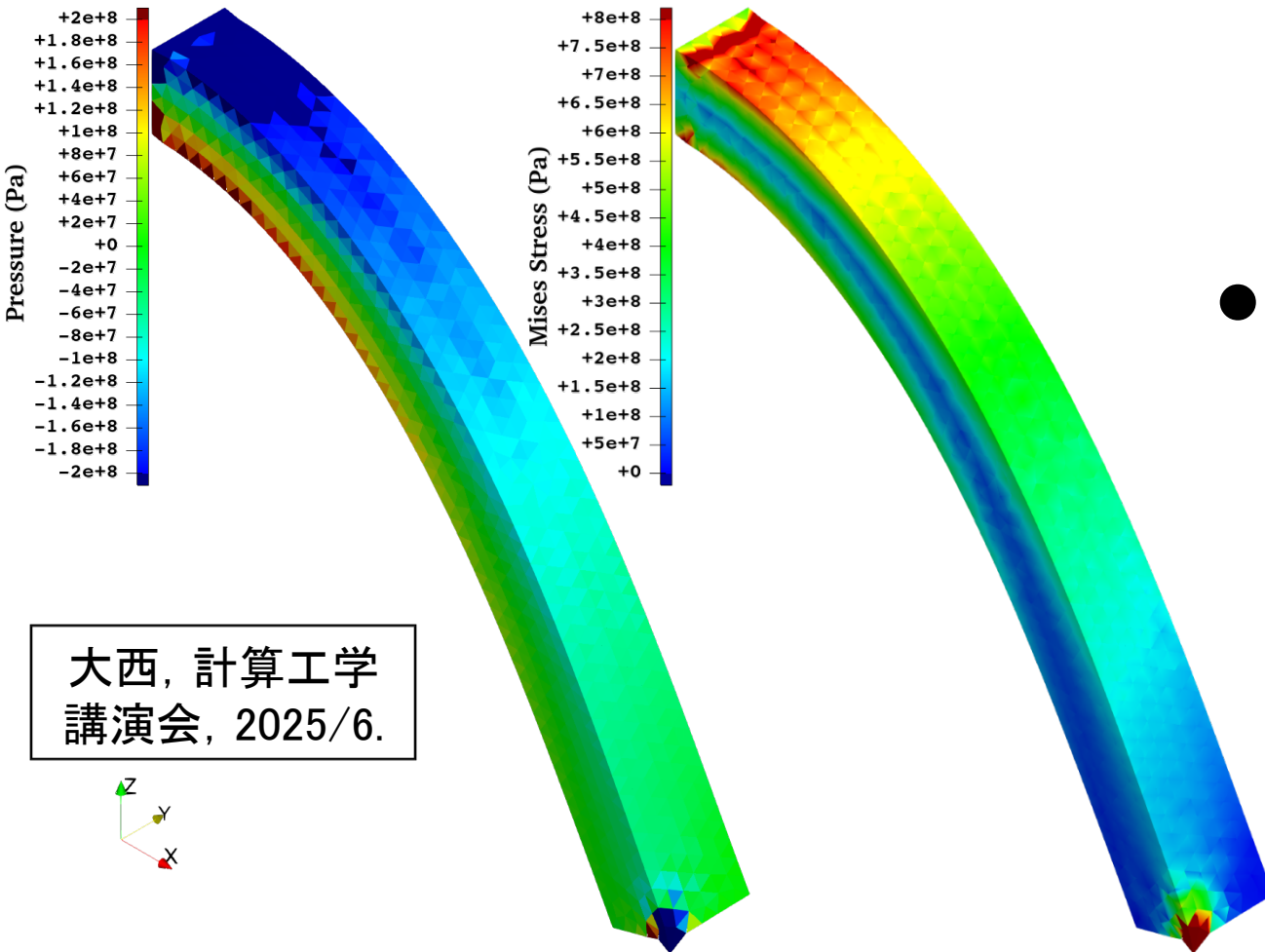
- せん断ロッキング
- 体積ロッキング
- 圧力チェッカーボーディング
- 節点反力振動 など



昨年提案したEC-SSE-SRI-T4の性能

3次元片持梁の微圧縮大たわみ解析

初期ポアソン比 $\nu_{ini} = 0.49$ のNeo-Hooke超弾性体



大西, 計算工学
講演会, 2025/6.

圧力とMises応力の精度がアンバランス

● 定式化の4つのポイント(詳細は簡単に後述):

- ① 選択的低減積分(SRI)
- ② 体積歪みの二重平滑
- ③ 非整合な静水圧応力積分
- ④ 次世代S-FEM(EC-SSE)の採用

● 性能:

- 圧力チェッカーボーディングを十分に低減.
- 各種ロッキングおよび節点反力振動なし.
- 大変形ロバスト性も良好. 実用性は充分
- 計算時間は同メッシュのFEM-T4の約7倍.

「大変形ロバスト性」と「精度」の問題はクリアしたが,
「計算速度」だけが未だクリアとは言い難い状況.
⇒ 次世代S-FEMを捨てて(=偏差成分の精度を少し
落として), もうチョット速くした方が良いのではないかな?

微圧縮大変形問題に対し、
偏差成分の計算には古典的なES-FEMを用い
体積成分の計算にはポイント①～③の最新手法を用いた
低コストな改良手法(**ES-FEM-SRI-T4**)を提案する。

先に結論：かなり上手く行きました!!

発表目次:

- 手法：**ES-FEM-SRI-T4**の定式化概要
- 結果と考察：解析例を通じた計算速度・大変形ロバスト性・精度の比較
- まとめ

手法

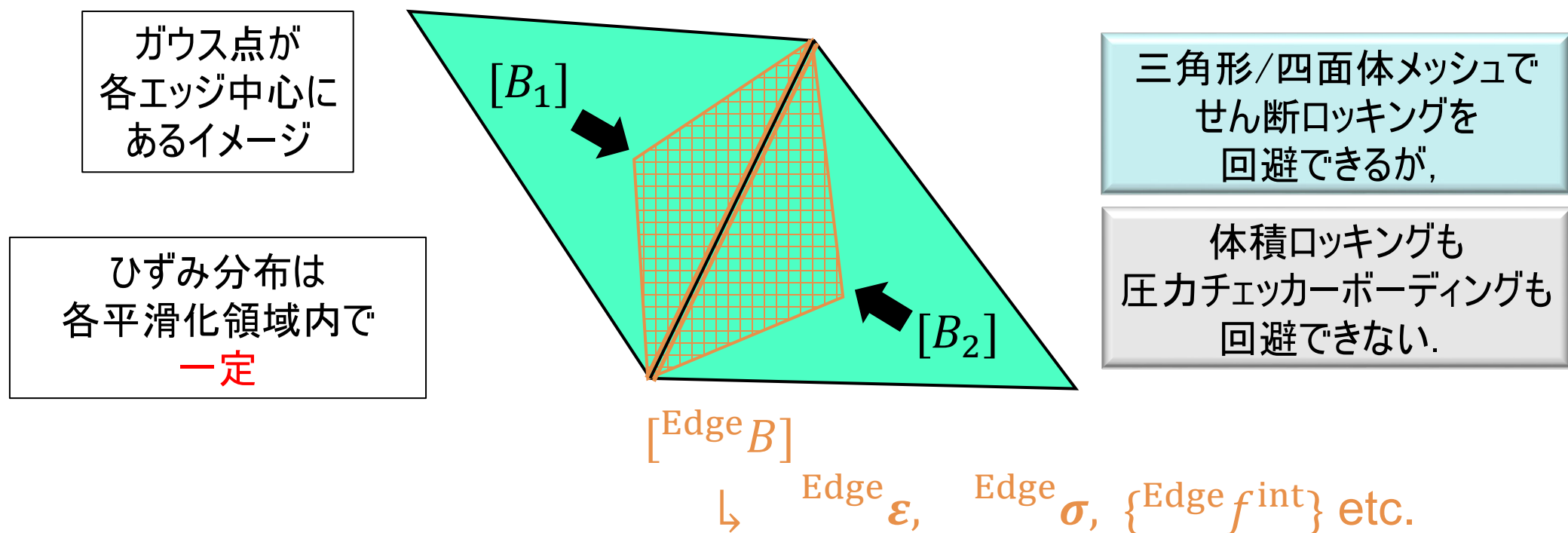
ES-FEM-SRI-T4の定式化概要

ES-FEMの定式化概要

下図のような3節点三角形メッシュがあるとする.

- 各セルのひずみ-変位マトリックス $[B]$ を通常のFEMと同様に作る.
- 各エッジにて周辺セルの $[B]$ を集め, 集めた各セルの体積を重みとして $[B]$ を平均化し, エッジ平滑化領域の $[^{\text{Edge}}B]$ を作る.
- $[^{\text{Edge}}B]$ を用いて各エッジのひずみ ε ・応力 σ ・節点内力 $\{f^{\text{int}}\}$ を計算する.

簡単のため
2次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します.



NS-FEMの定式化概要

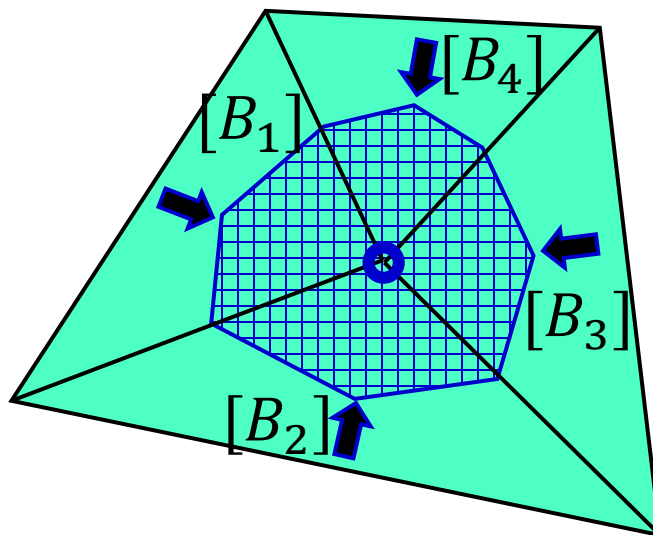
下図のような3節点三角形メッシュがあるとする.

- 各セルのひずみ-変位マトリックス $[B]$ を通常のFEMと同様に作る.
- 各ノードにて周辺セルの $[B]$ を集め, 集めた各セルの体積を重みとして $[B]$ を平均化し, ノード平滑化領域の $[^{\text{Node}}B]$ を作る.
- $[^{\text{Node}}B]$ を用いて各ノードのひずみ ε ・応力 σ ・節点内力 $\{f^{\text{int}}\}$ を計算する.

簡単のため
2次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します.

ガウス点が
各ノードに
あるイメージ

ひずみ分布は
各平滑化領域内で
一定



三角形/四面体メッシュで
せん断・体積ロッキングを
回避できるが,

圧力チェッカーボーディングは
残存してしまう,
疑似低エネルギーモード
(アワーグラスモードの類)
が現れてしまう.

$[^{\text{Node}}B]$



$\text{Node } \varepsilon,$

$\text{Node } \sigma, \{\text{Node } f^{\text{int}}\} \text{ etc.}$

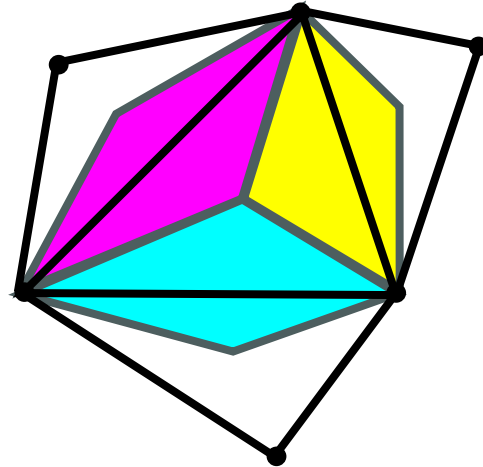
ES-FEM-SRIの定式化概要 (①選択的低減積分と②体積歪みの二重平滑)

微圧縮材料に対応するため、選択的低減積分(SRI)を適用.

簡単のため
2次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します.

(1) ES-FEMによる各エッジでの
偏差ひずみの計算

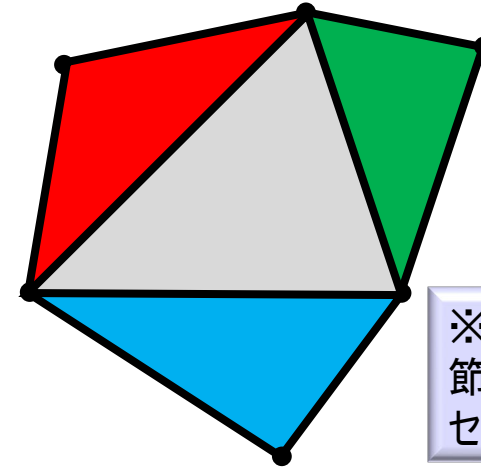
偏差
成分



(2) 各エッジでの偏差応力と
その節点内力寄与 $\{f_{dev}^{int}\}$ の計算

(3) 二重平滑を経た各セルでの
体積ひずみの計算

体積
成分



※二重平滑
節点でのひずみ平滑(NS-FEM)の後に、
セルでのひずみ平滑(NS-FEM⁻¹)を行う.

(4) 各セルでの静水圧応力と
その節点内力寄与 $\{f_{hyd}^{int}\}$ の計算

選択的低減積分
(SRI)

- せん断ロッキングの回避
- せん断応力精度の向上

- 体積ロッキングの回避
- 圧力チェッカーボーディングの低減

(5) 節点内力 $\{f^{int}\}$ の組み立て

ES-FEM-SRIの定式化概要 (③非整合な静水圧応力積分)

あるセル c における静水圧応力積分(1点積分)の式:

静水圧応力の
節点内力寄与

標準的な
FEM-T4の
Bマトリックス

標準的な
FEM-T4の
セル体積

$$\{\text{Cell}_c f_{\text{hyd}}^{\text{int}}\} = [\text{Cell}_c \mathbf{B}]^T \{\text{Cell}_c \tilde{\sigma}_{\text{hyd}}\} \text{Cell}_c V$$

二重平滑を経たひずみの
体積成分 $\text{Cell}_c \tilde{\varepsilon}_{\text{vol}}$ から
算出された静水圧応力

- $[\text{Cell}_c \mathbf{B}]$ を用いることで節点内力の分配範囲が狭くなる(左辺ベクトルは4節点分のみ).
- 他方, $\{\text{Cell}_c \tilde{\sigma}_{\text{hyd}}\}$ はセル c 周辺の多数のセルから算出される.
- 要するに「広く集めて,狭く配る」静水圧応力積分で**圧力チェッカーボーディングを強力に低減**.
- デメリットとして, **非整合な応力積分**により動解析時のエネルギー発散が起きる
($[K] = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]$ の形式でなくなることにより正定値性が失われる)が, **静解析なら大丈夫**.

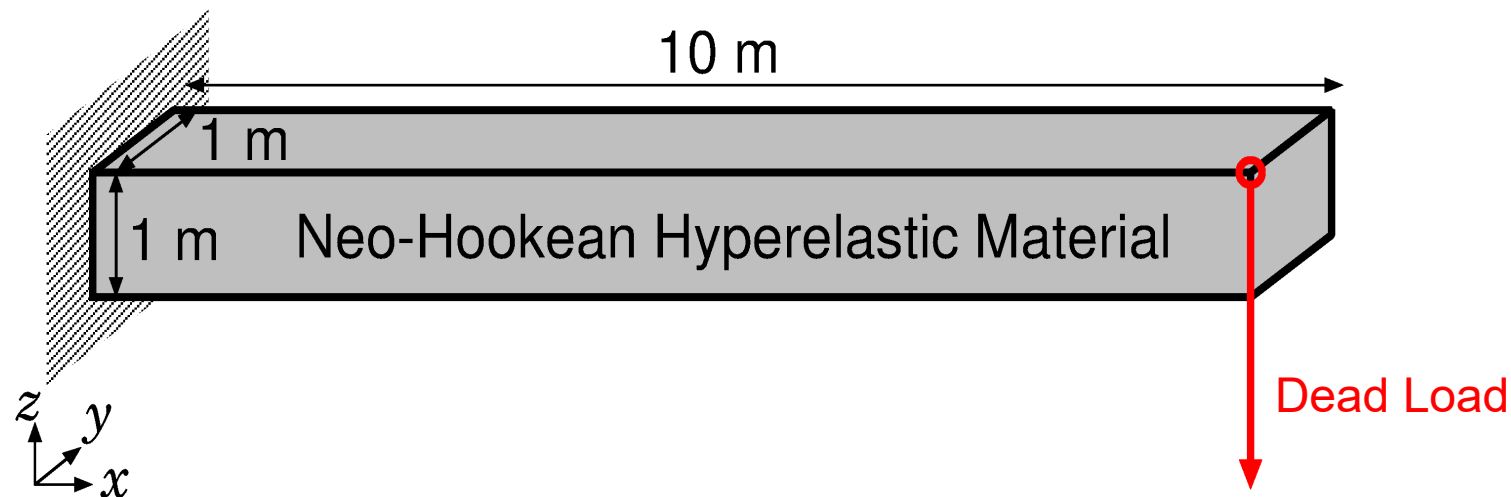
定式化のポイントはこれだけ. 偏差/体積成分共に計算を出来るだけシンプルにして計算速度低下を回避した.

結果と考察

解析例を通じた計算速度・大変形ロバスト性・精度の比較

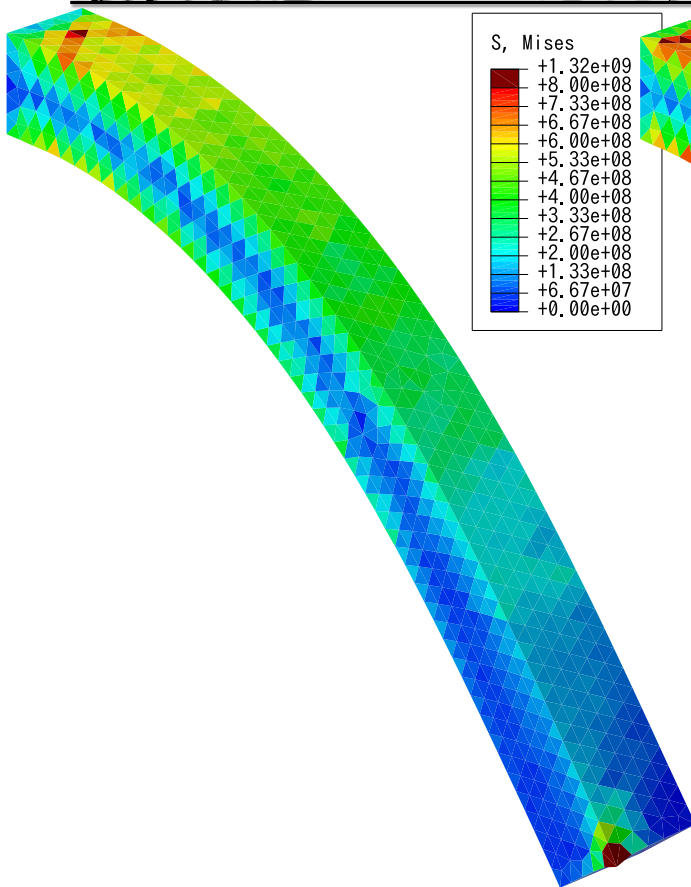
片持ち梁の大ひずみ曲げ解析

概要

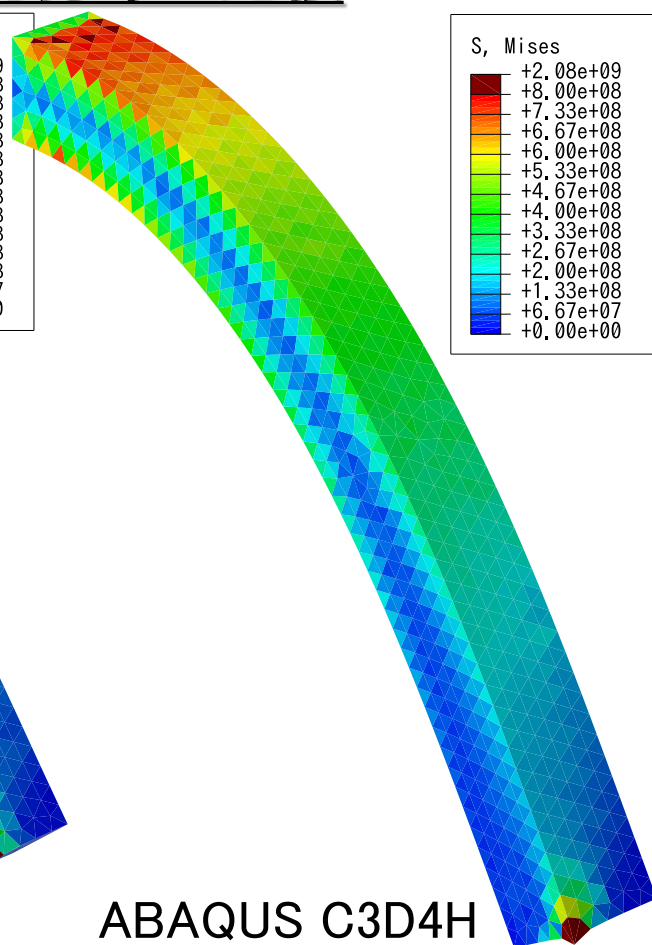


- 10 m x 1 m x 1 m の片持ち梁の先端に死荷重.
- Neo-Hook超弾性体 ($E_{ini} = 6$ GPa, $\nu_{ini} = 0.49$)
- 先端の最終たわみが約6.5 mの大たわみ問題.
- 先端荷重が20 MNとなった時点の応力分布を比較.

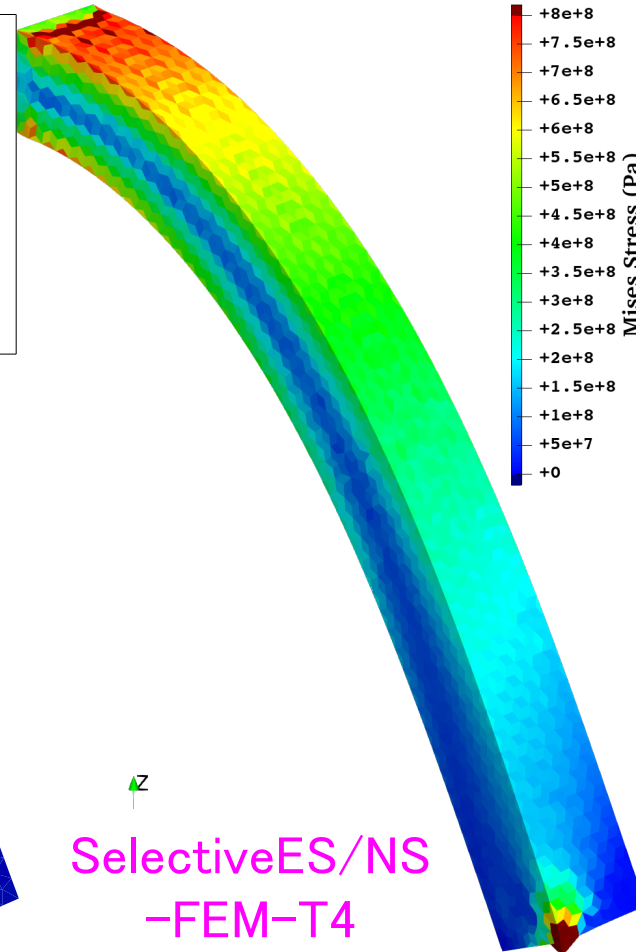
最終状態のMises応力分布の比較



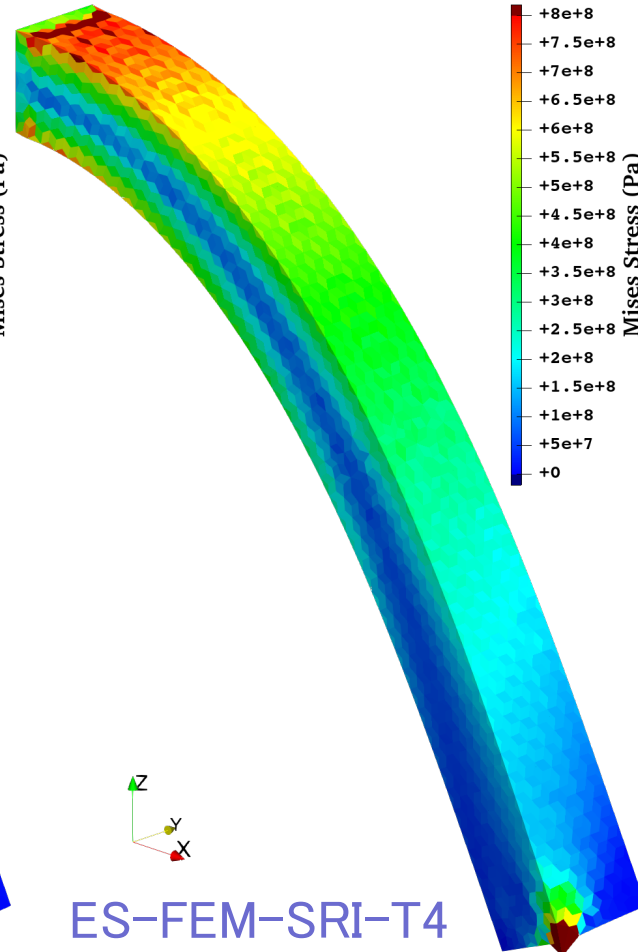
ABAQUS C3D4



ABAQUS C3D4H



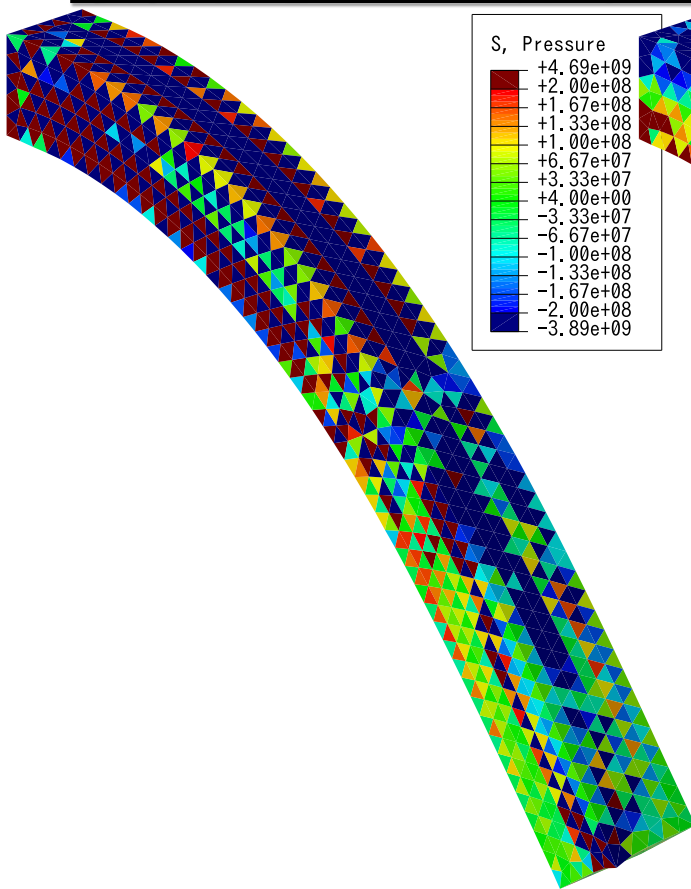
Selective ES/NS
-FEM-T4



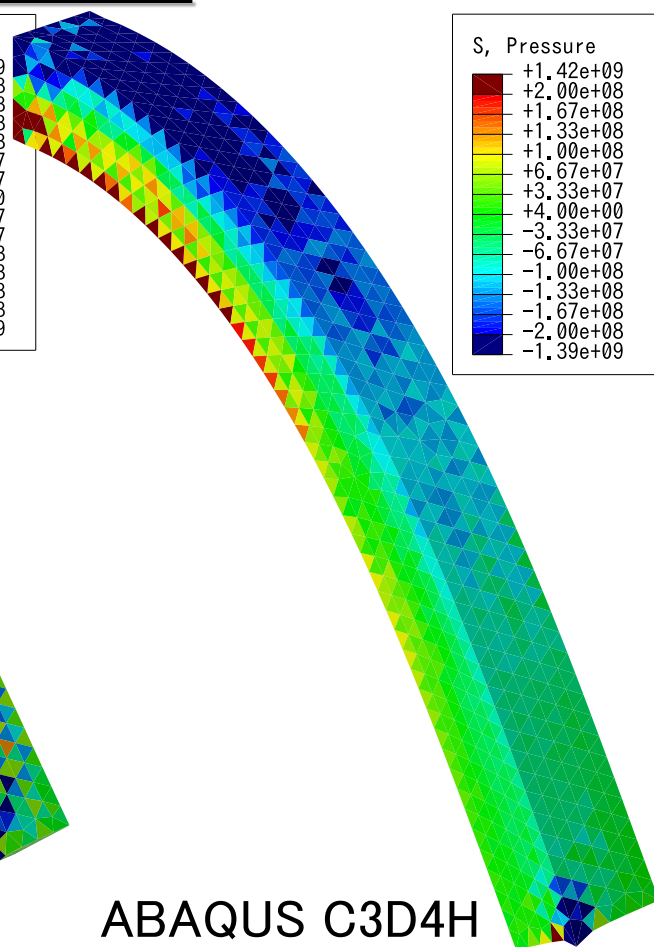
ES-FEM-SRI-T4

- C3D4は体積ロッキングしており問題外. C3D4Hは分布がやや粗く, せん断ロッキングも起こしている.
- S-FEM2種は問題無し.

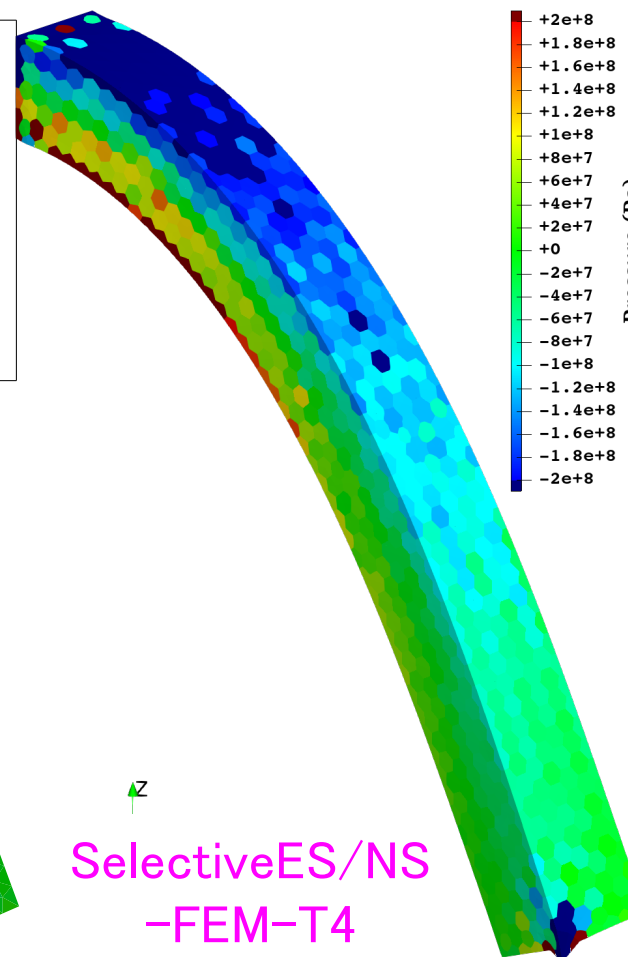
最終状態の圧力分布の比較



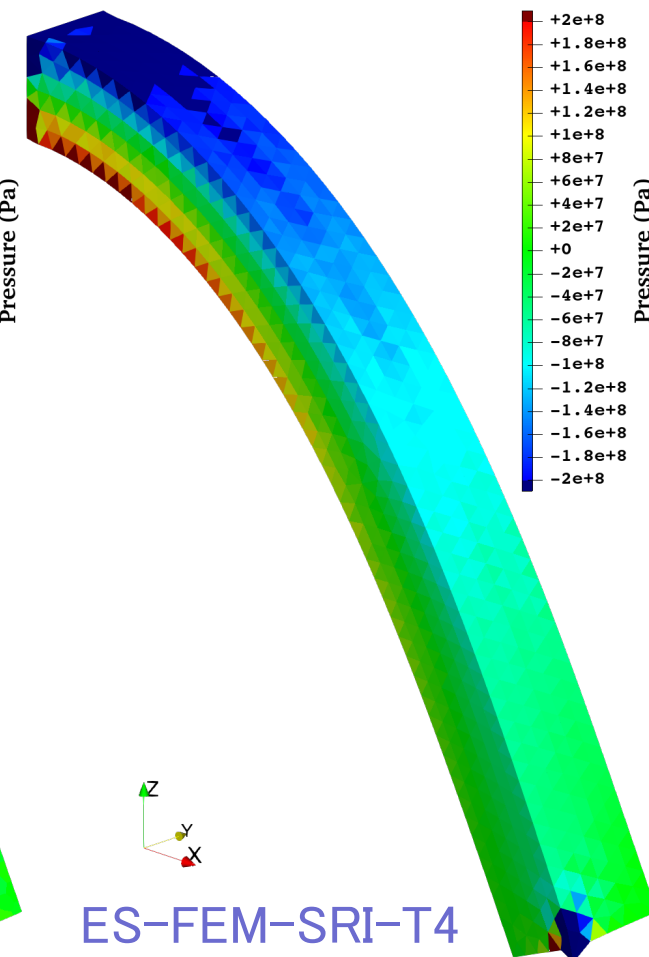
ABAQUS C3D4



ABAQUS C3D4H



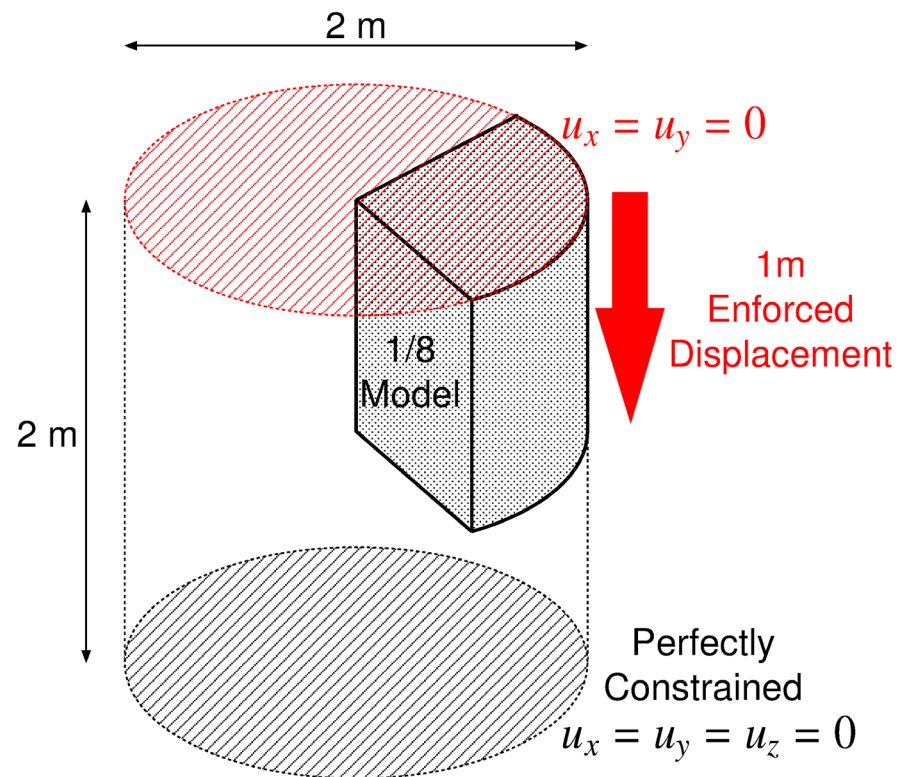
Selective ES/NS
-FEM-T4



ES-FEM-SRI-T4

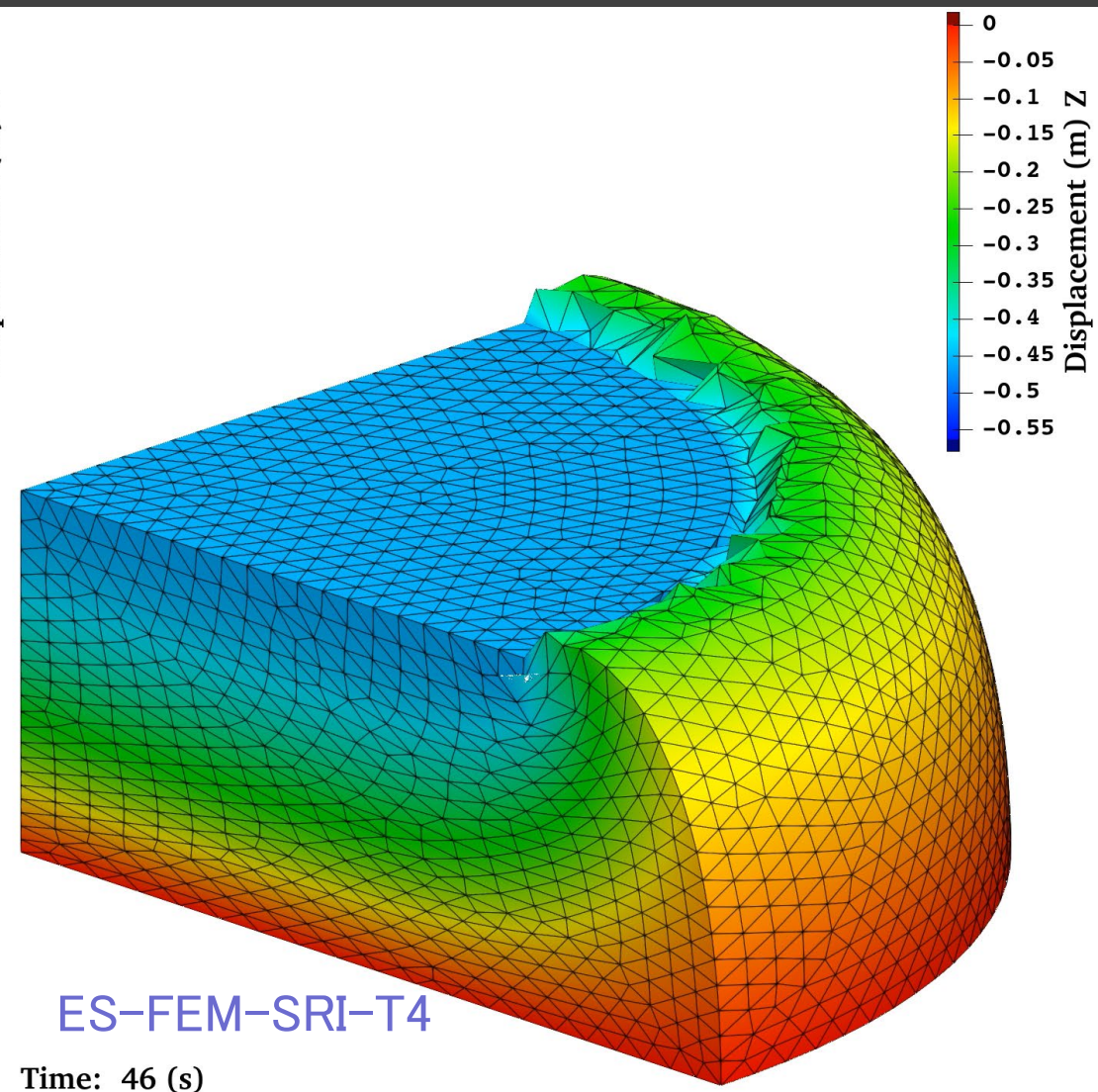
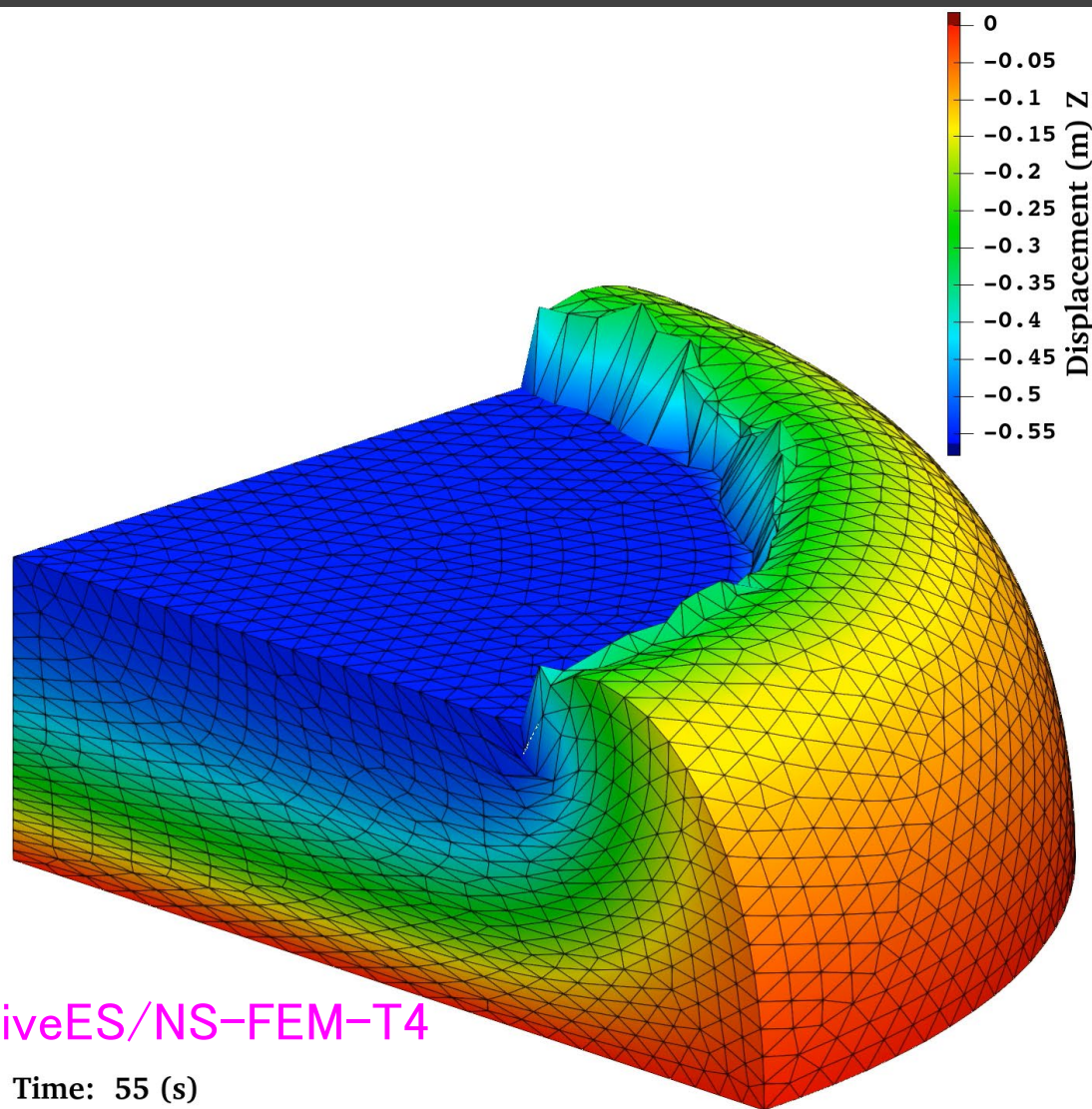
- ES-FEM-SRI-T4のみ，圧力チェッカーボーディングが抑制された実用に耐える圧力分布を示している。
- 圧力の精度が悪いと σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} の精度も同じだけ悪くなってしまうので，軽々に看過できる問題ではない。

概要



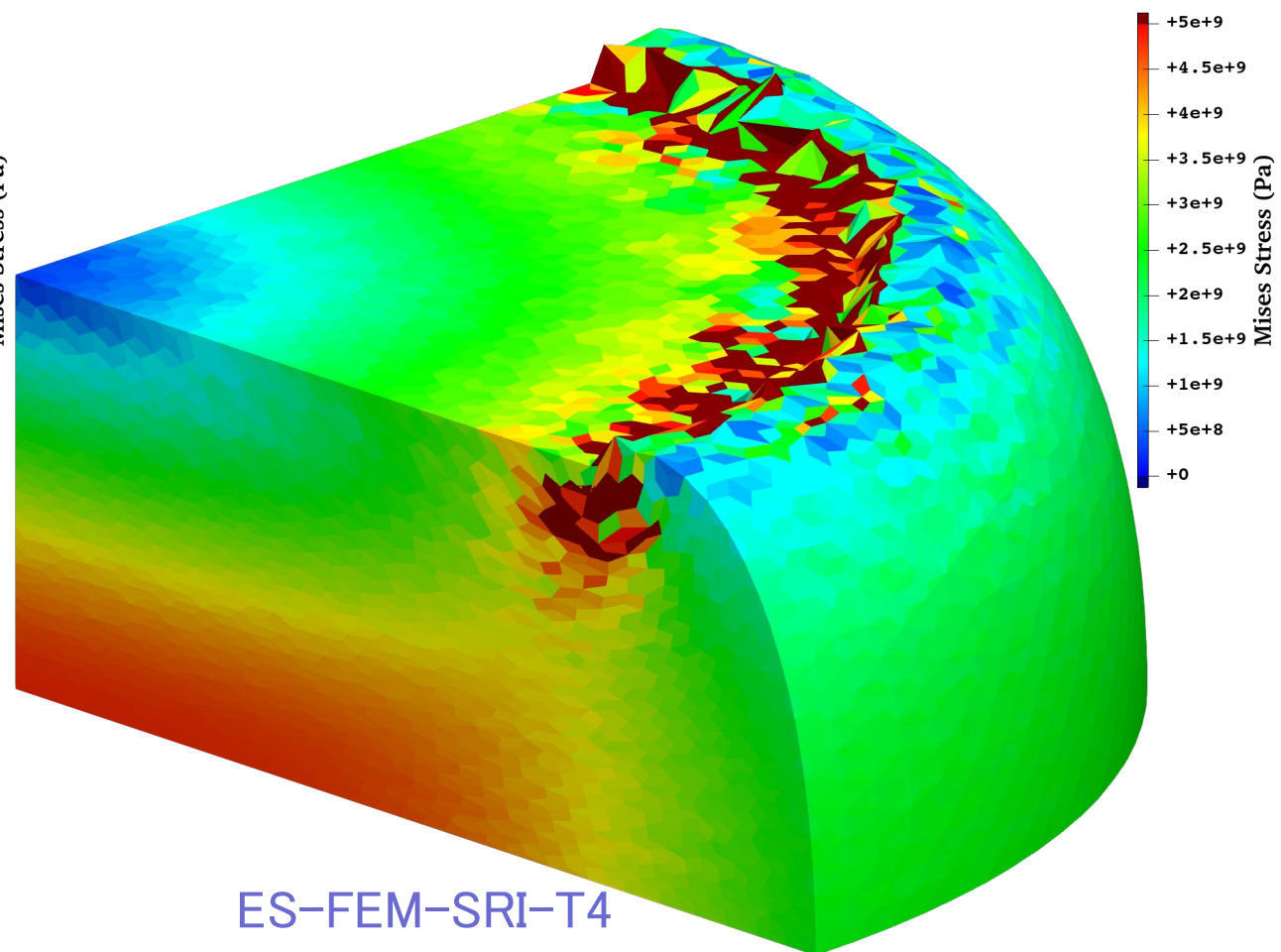
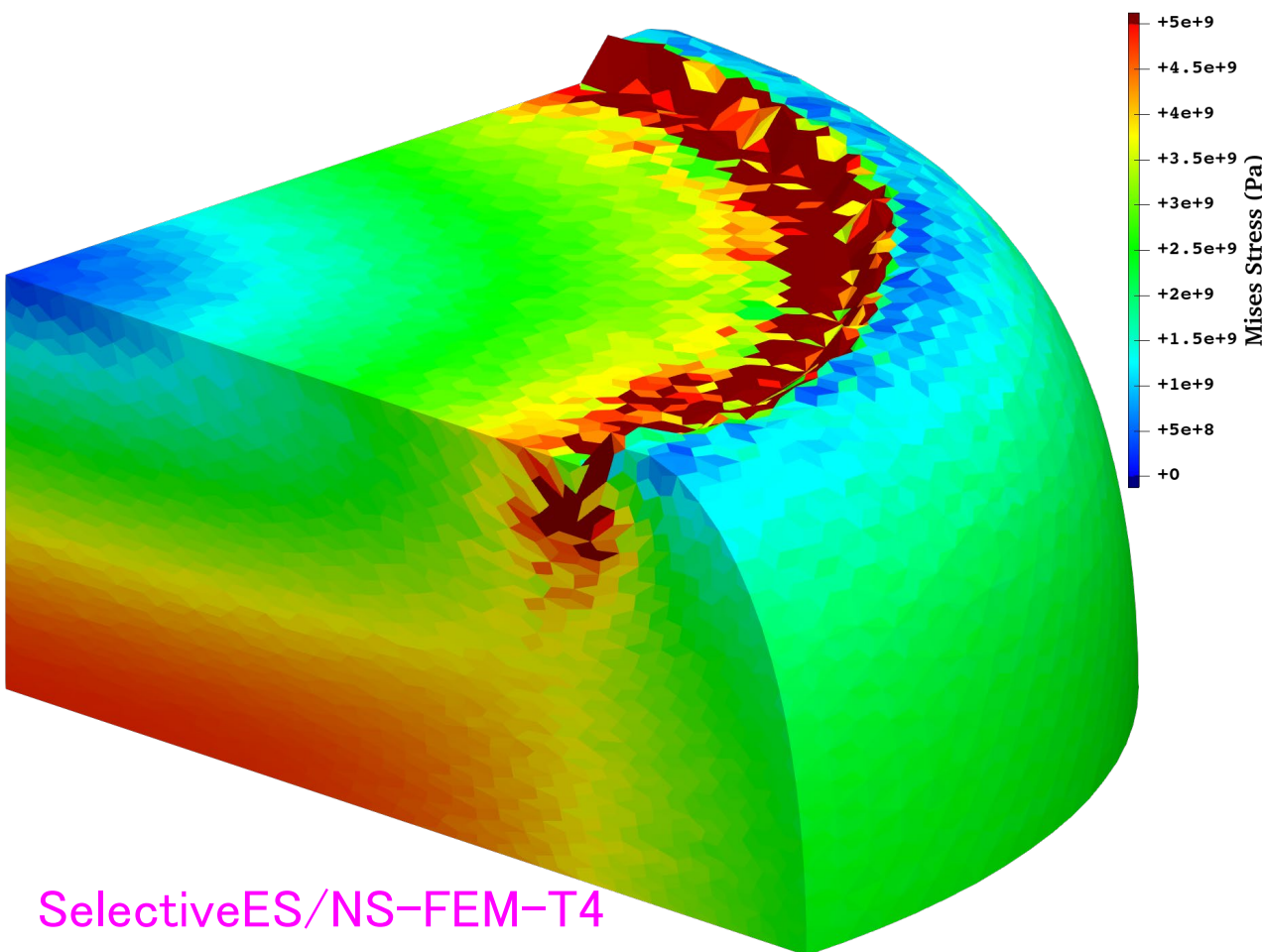
- 上面を面内拘束し軸方向に下向き強制変位.
- Neo-Hook超弾性体 ($E_{ini} = 6 \text{ GPa}$, $\nu_{ini} = 0.49$)

Z方向
変位分布
時刻歴
の比較



ES-FEM-SRI-T4の大変形ロバスト性は若干落ちるが、比較的小幅な違いに留まっている。

公称46%圧縮時点のMises応力分布の比較

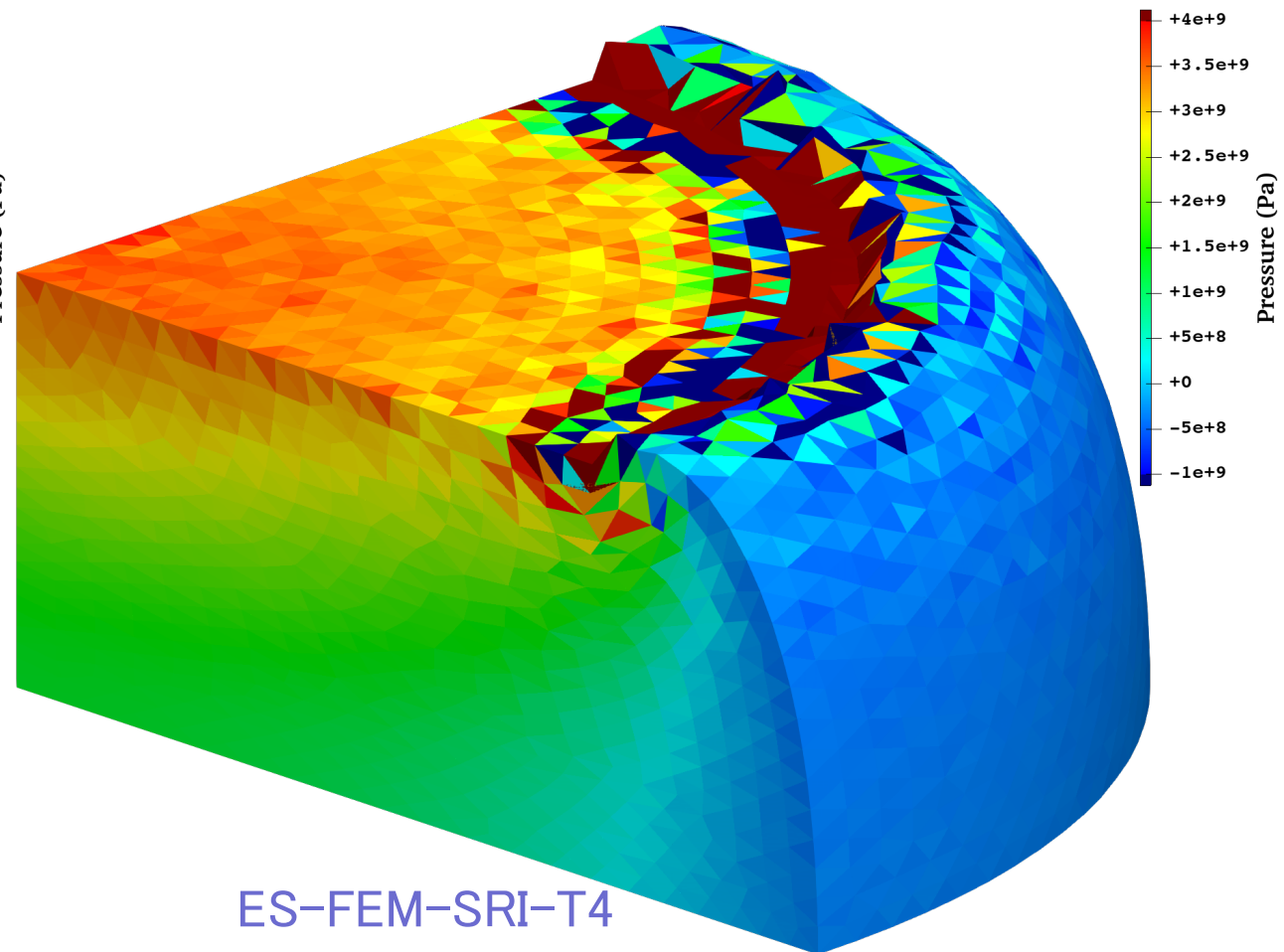
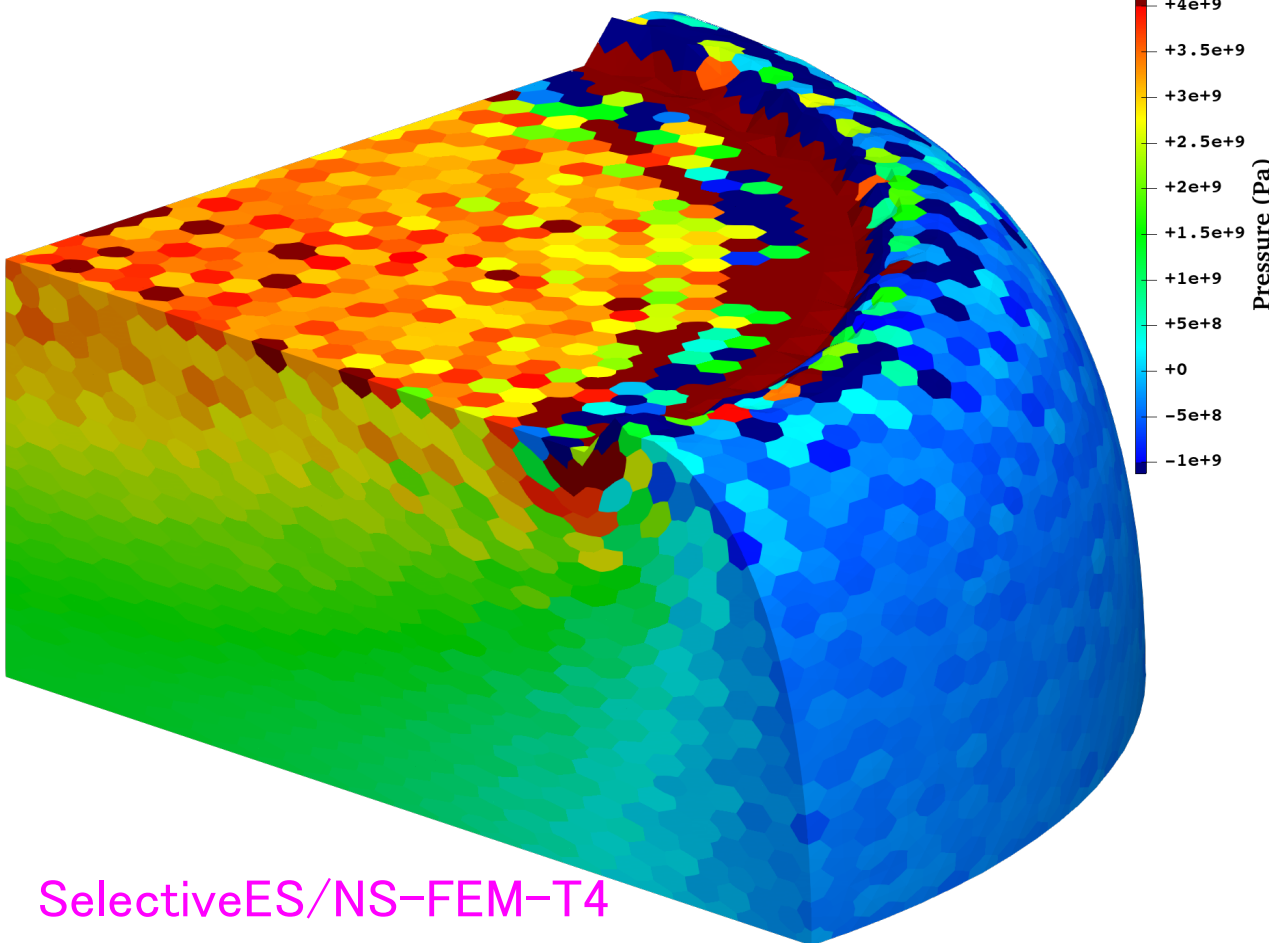


偏差成分の計算法は両者同じなので、ほとんど違いは見られない。

円柱の大変形押込解析

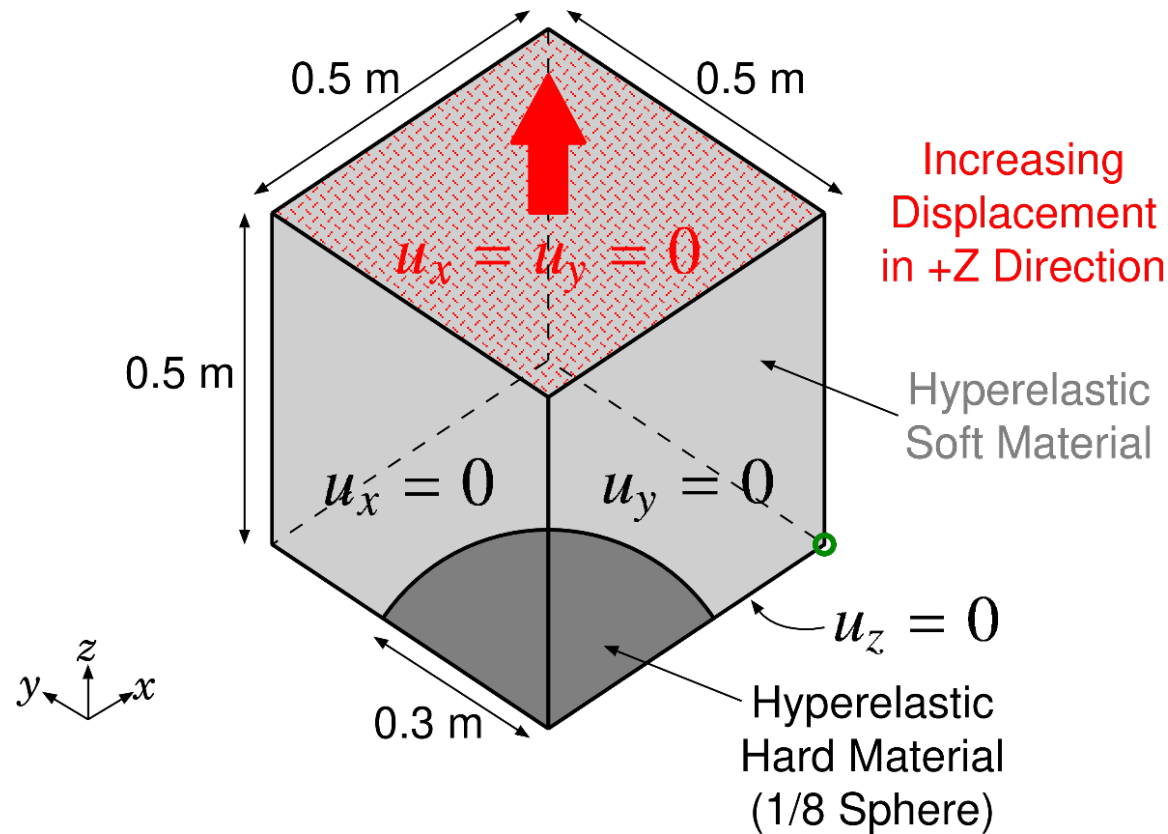
公称46%圧縮時点の圧力分布の比較

※ SelectiveES/NS-FEM-T4は節点周りで,
ES-FEM-SRI-T4はセル単位で
圧力が区分一定であることに要注意.



ES-FEM-SRI-T4の方が明らかに圧力チェッカーボーディングが少なく、実用に耐える精度.

概要



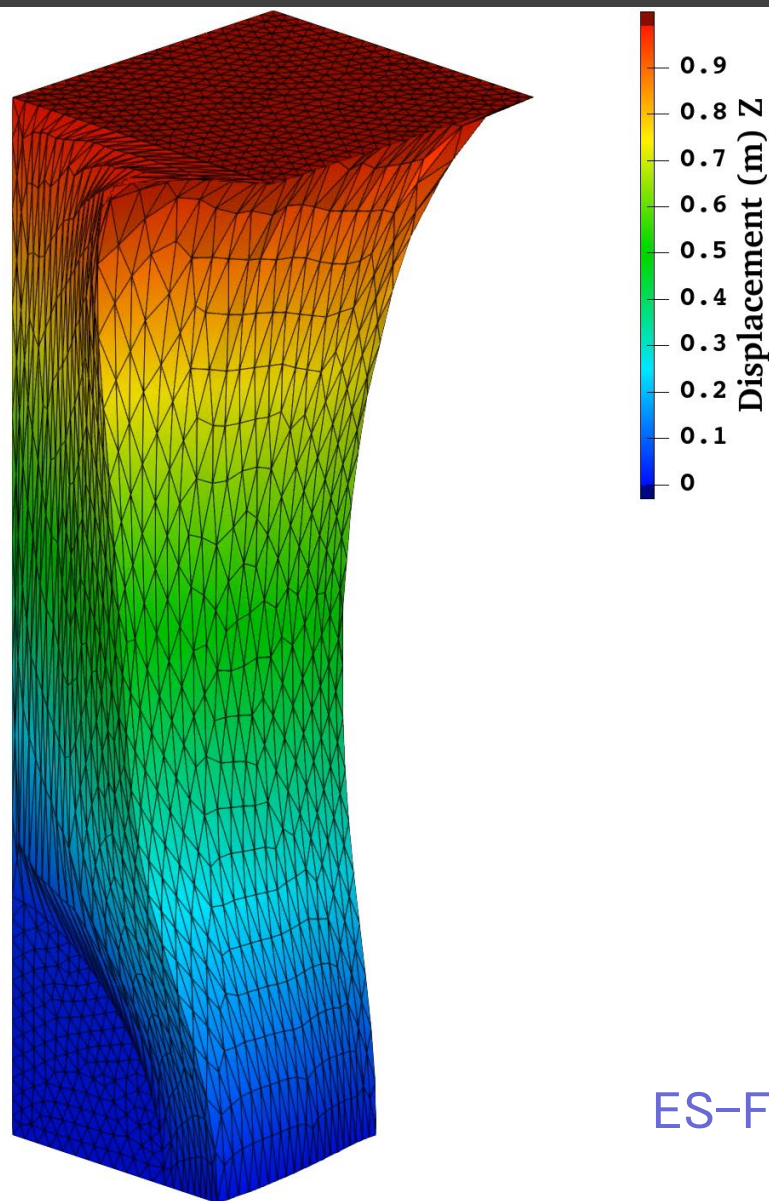
- 1/8モデル
- 鉄フィラー: Neo-Hook超弾性体 ($E_{ini} = 260 \text{ GPa}$, $\nu_{ini} = 0.3$)
- ゴム: Neo-Hook超弾性体 ($E_{ini} = 6 \text{ GPa}$, $\nu_{ini} = 0.49$)
- 高さ0.5 mだったのを1.3 m超になるまで引き伸ばした際の応力分布をS-FEM2種で比較.

Z方向変位分布 時刻歴の比較

ES-FEM-SRI-T4
の
大変形口バスト
性は若干落ちるが、
比較的小幅な違
いに留まっている。

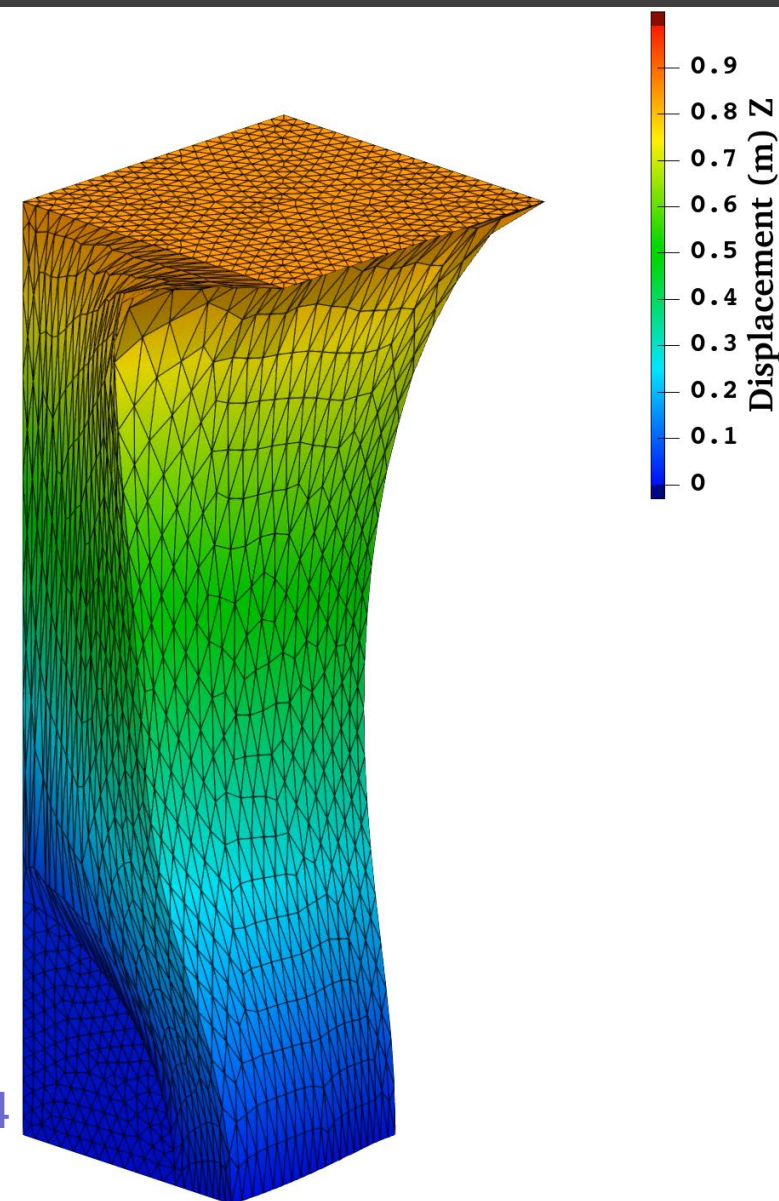
SelectiveES/NS-FEM-T4

Time: 99 (s)



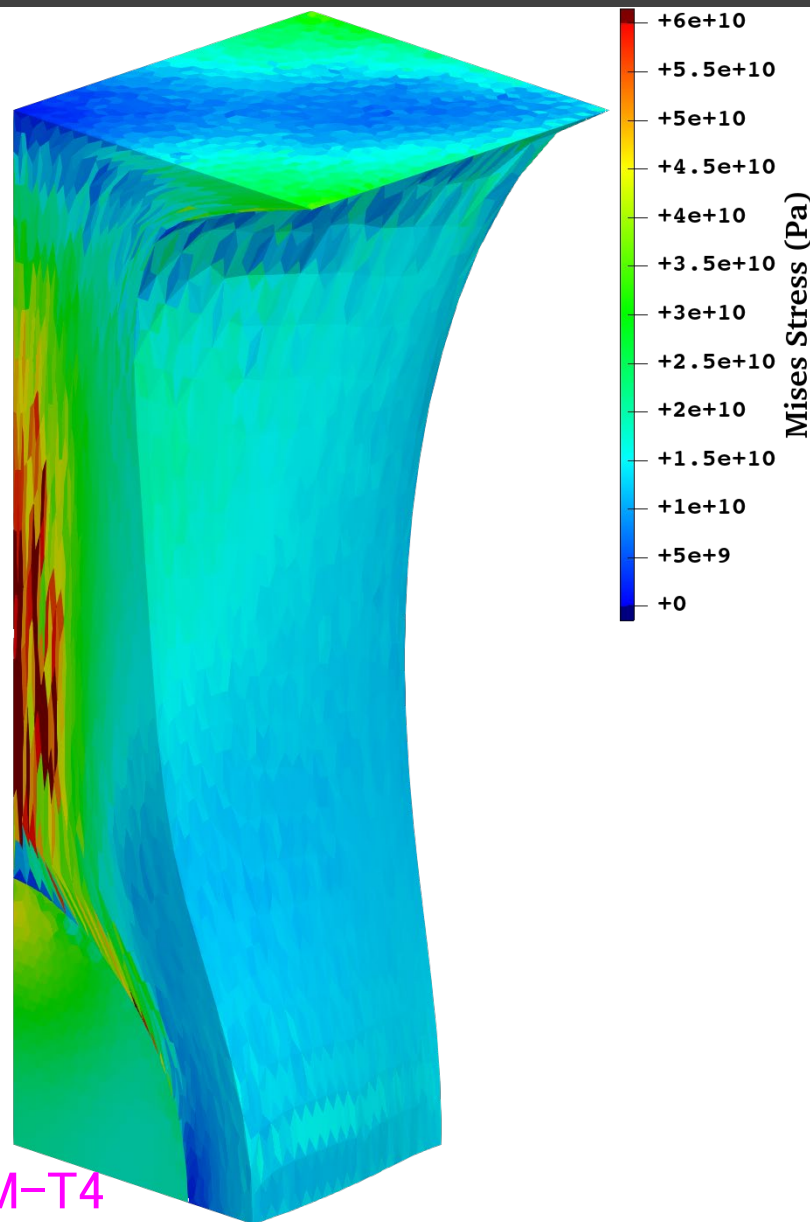
ES-FEM-SRI-T4

Time: 84 (s)

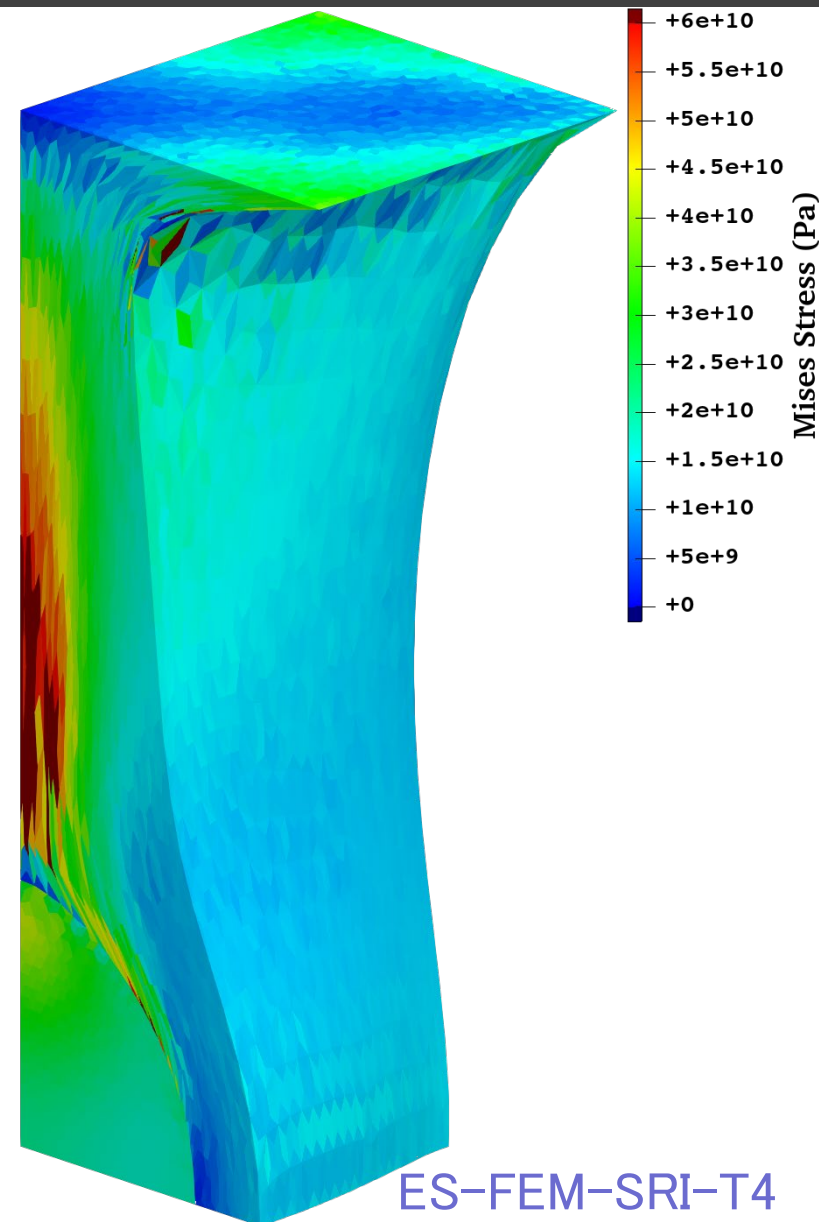


2.6倍伸長時点の Mises応力分布の 比較

偏差成分の計算法
は両者同じなので、
ほとんど違いは見ら
れない。



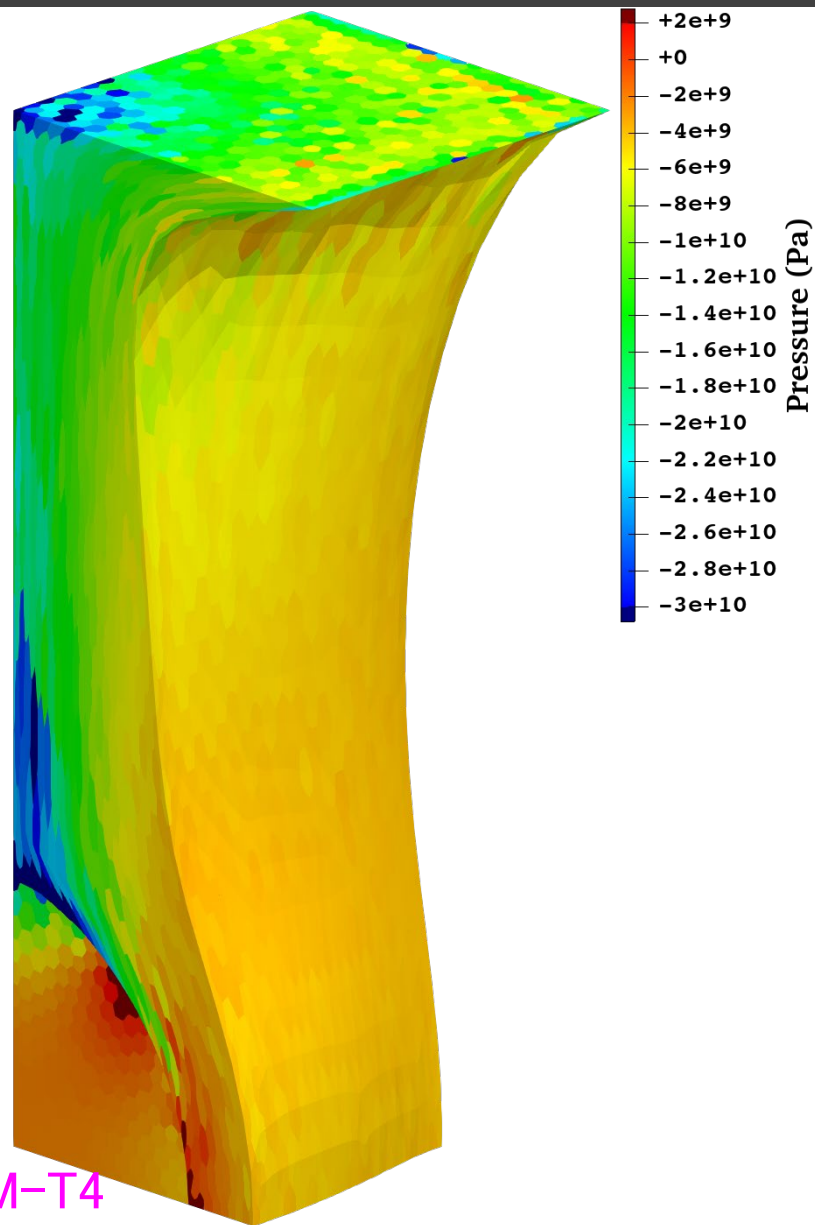
SelectiveES/NS-FEM-T4



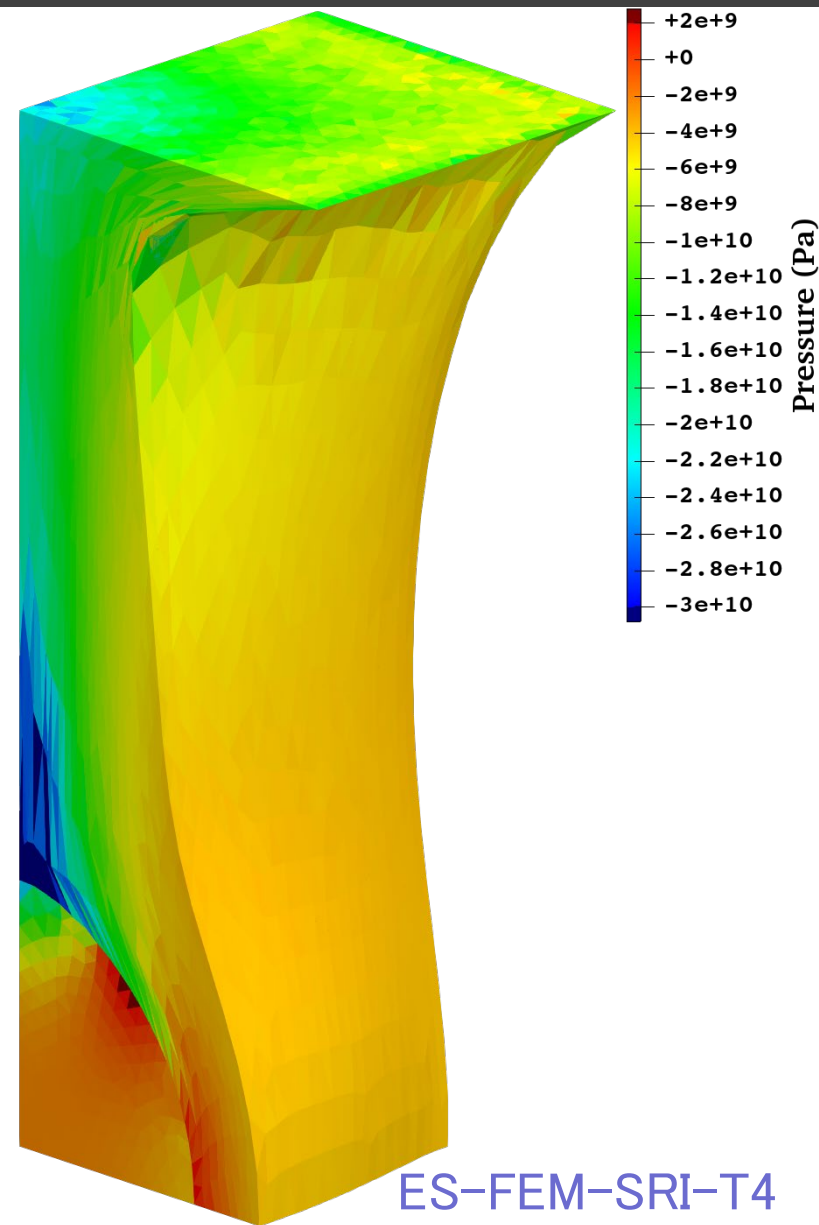
ES-FEM-SRI-T4

2.6倍伸長時点の 圧力分布の 比較

ES-FEM-SRI-T4は
ゴム部でも圧力
チェッカーボーディング
が低減された綺麗な
分布.



Selective ES/NS-FEM-T4



ES-FEM-SRI-T4

計算速度に関する考察

- 陰解法の計算時間の大部分は剛性方程式を解くことに費やされるため、剛性マトリックス $[K]$ のサイズとバンド幅が計算時間に直結する.
- S-FEMファミリーは純粋な変位型の定式化なので、剛性マトリックス $[K]$ のサイズ(自由度の数 N)はFEM-T4と全く同じ.
- つまり, $[K]$ のバンド幅が計算時間に直結する.

定式化	$[K]$ のバンド幅	対FEM-T4比
FEM-T4	約14節点×3自由度	1 倍
FEM-T10	約28節点×3自由度	約2倍
ES-FEM-T4	約45節点×3自由度	約3倍
NS-FEM-T4, SelectiveES/NS-FEM-T4, ES-FEM-SRI-T4	約60節点×3自由度	約4倍
EC-SSE-T4-SRI	約94節点×3自由度	約7倍

要素をまたぐ歪み
平滑を繰り返す毎に
剛性マトリックス $[K]$ の
バンド幅は広がる.

理論的にも実測でも、計算時間は従来の標準S-FEMとほぼ同じ.

まとめ

ES-FEM-SRI-T4のまとめ

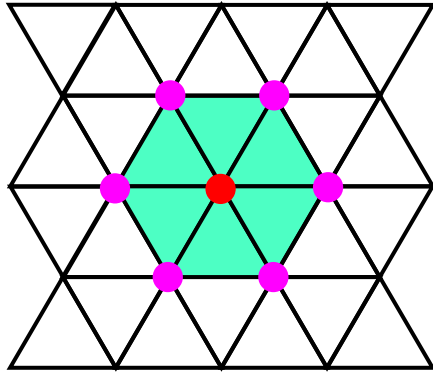
- 微圧縮解析に現れる圧力チェッカーボーディングを低コストで抑制できる新しい平滑化有限要素法「ES-FEM-SRI-T4」を提案した.
- SRIの枠組みの中で、偏差成分には古典的なES-FEM, 体積成分には二重平滑を用いた.
- 「**速い**・**強い**・**確か**」の三拍子(速い計算速度・強い大変形ロバスト性・確かな精度)をバランス良く達成していることを示した.
- 同一メッシュでの**計算時間はFEM-T4の約4倍で、従来の標準S-FEMと同等**.
- **ポアソン比0.49**の微圧縮大変形解析において、**従来の標準S-FEMと同等の大変形ロバスト性**がある上、**圧力チェッカーボーディング少ない高精度な解**が得られる.
- 微圧縮大変形の静解析に対して**大きな欠点がひとつも無い**定式化であり、提案手法はこれ以上の改良が難しい1つの完成形ではないかと考えている.
- これからの普及と実用化に乞うご期待.

ご清聴ありがとうございました.

付録

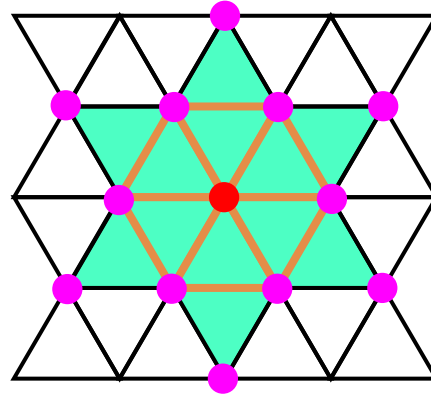
剛性マトリックスのバンド幅

- S-FEMの剛性マトリックス $[K]$ のバンド幅は標準的なFEMより広い。
＜2次元T3メッシュの場合＞



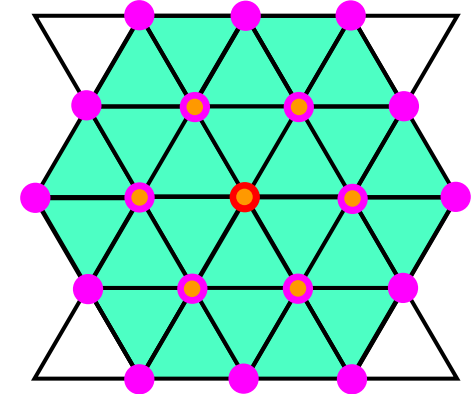
FEM-T3 (バンド幅: 7)

ある節点は
6個のセルに参照される
⇒ 自身を含め
7個の節点と手を繋ぐ



ES-FEM-T3 (バンド幅: 13)

ある節点は
12本のエッジに参照され、
それらは12個のセルに参照される
⇒ 自身を含め
13個の節点と手を繋ぐ



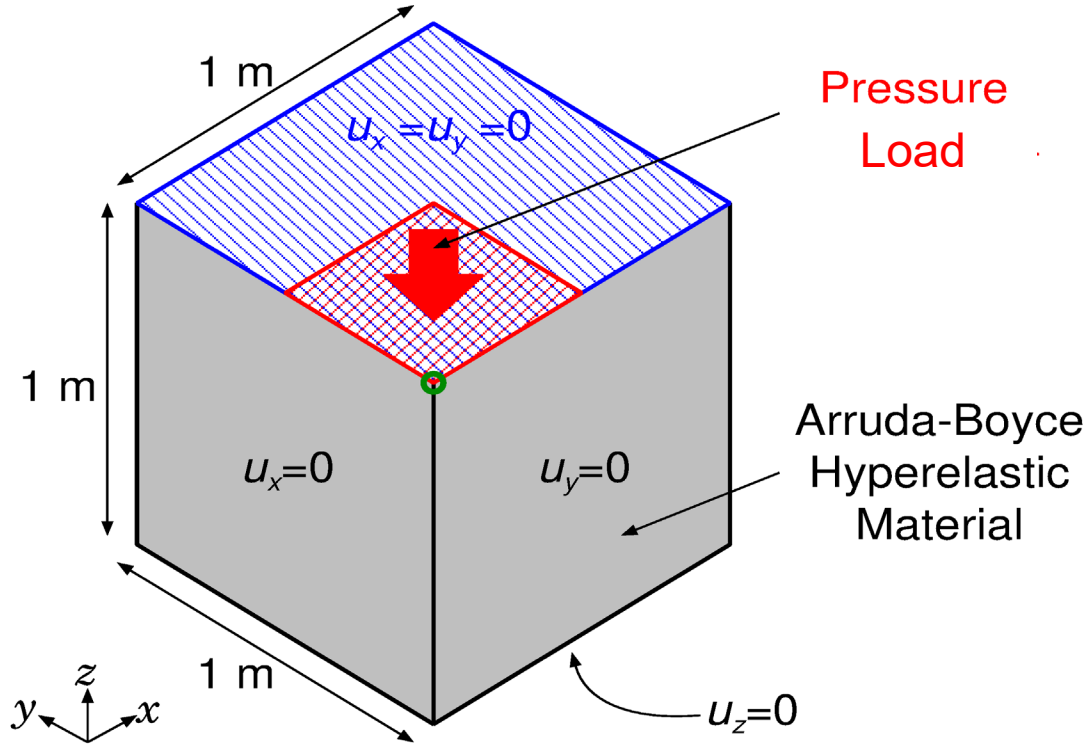
NS-FEM-T3 (バンド幅: 19)

ある節点は
自身を含め7個の節点に参照され、
それらは24個のセルに参照される
⇒ 自身を含め
19個の節点と手を繋ぐ

- 3次元T4メッシュの場合、各定式化の節点バンド幅はそれぞれ約14, 45, 60となる。
→ 同じメッシュなら、FEM-T4よりES-FEM-T4は約3倍計算が遅い。
同様に、NS-FEM-T4, SelectiveES/NS-FEM-T4, およびES-FEM-SRI-T4は約4倍遅い。

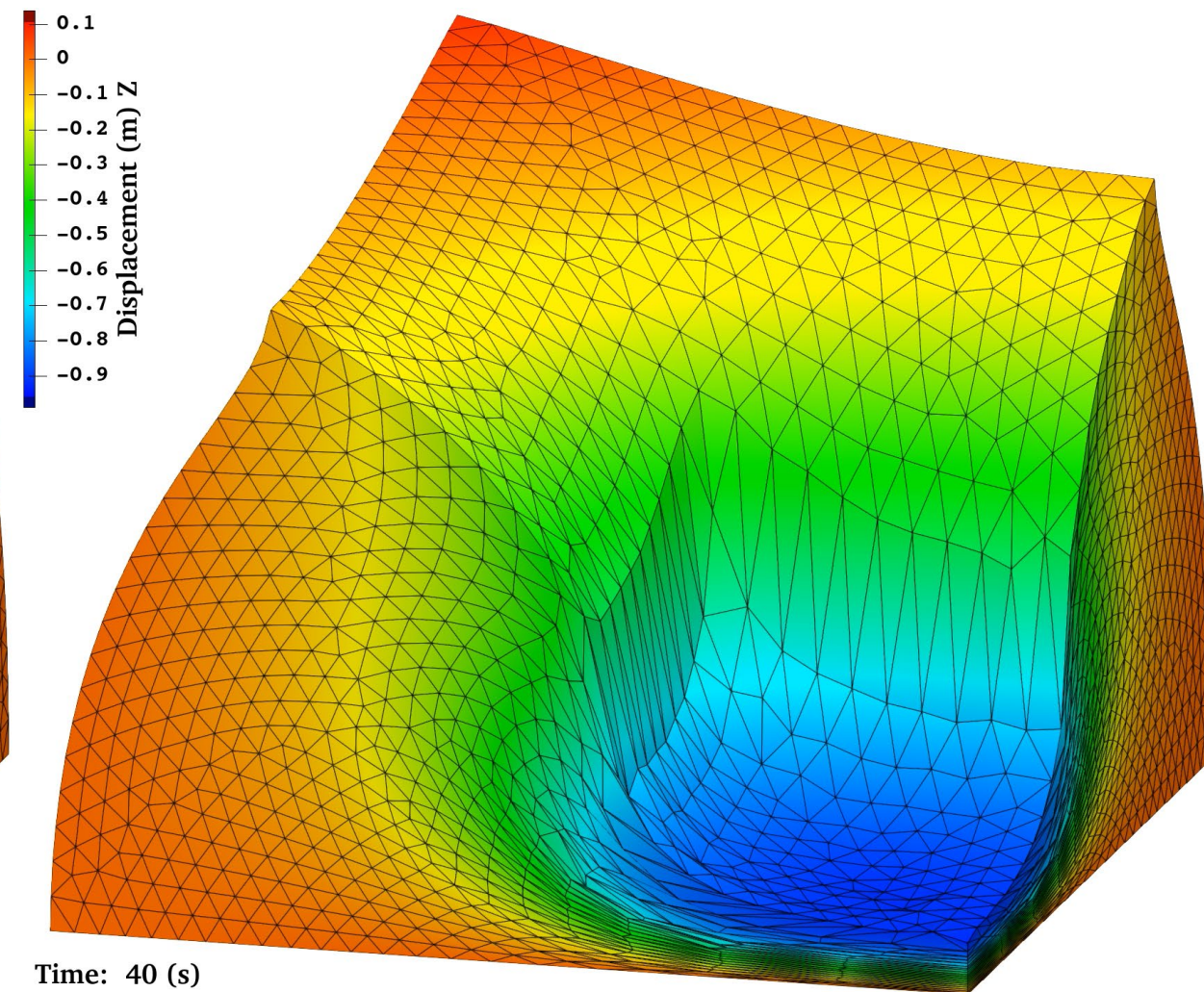
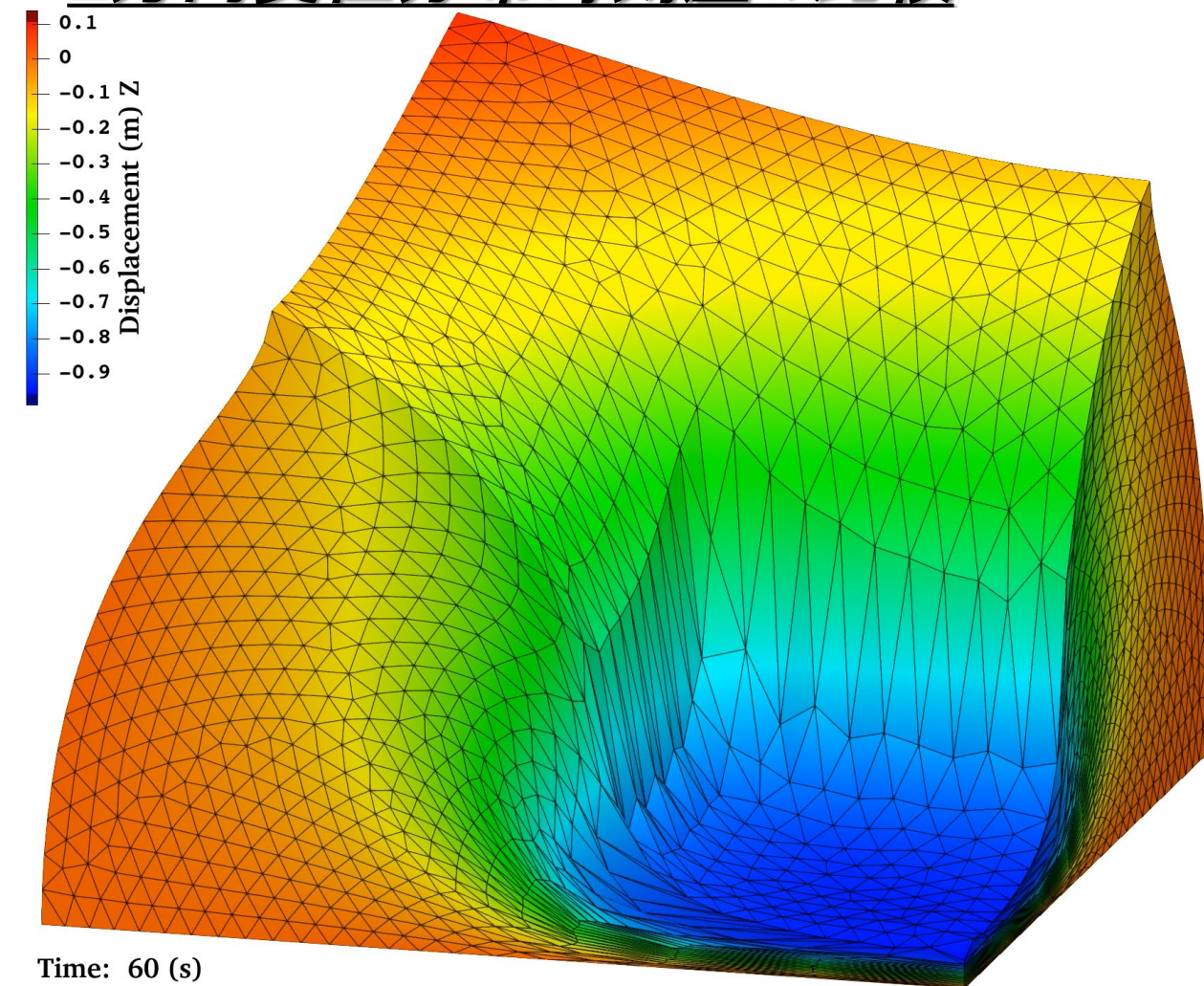
ブロックの圧力押込大変形解析

概要



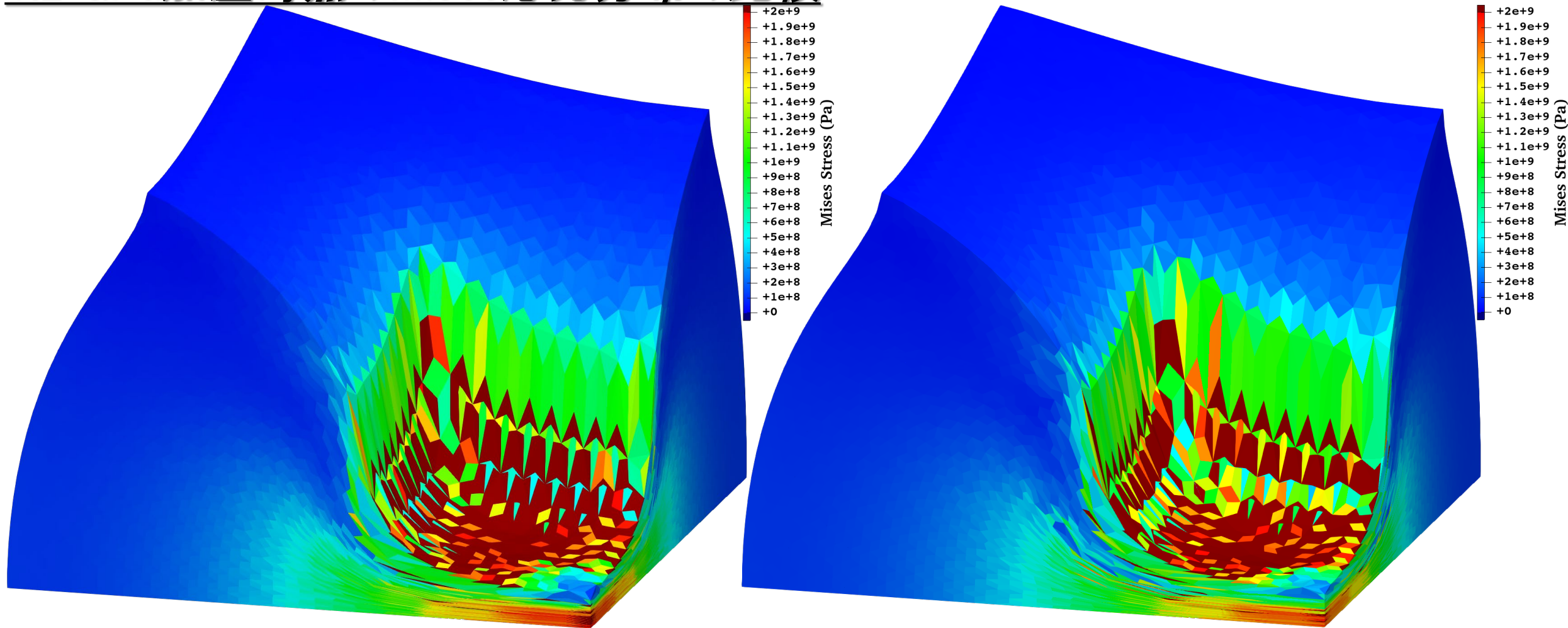
- 1/4モデル.
- Arruda-Boyce超弾性体 ($\nu_{ini} = 0.49$).
- 上面の1/4の領域に圧力を加えて押し込む.
- 押込圧力を1秒あたり30 MPaずつ増やした際の応力分布をS-FEM2種で比較.

Z方向変位分布時刻歴の比較



ES-FEM-SRI-T4の大変形ロバスト性は若干落ちるが、比較的小幅な違いに留まっている。

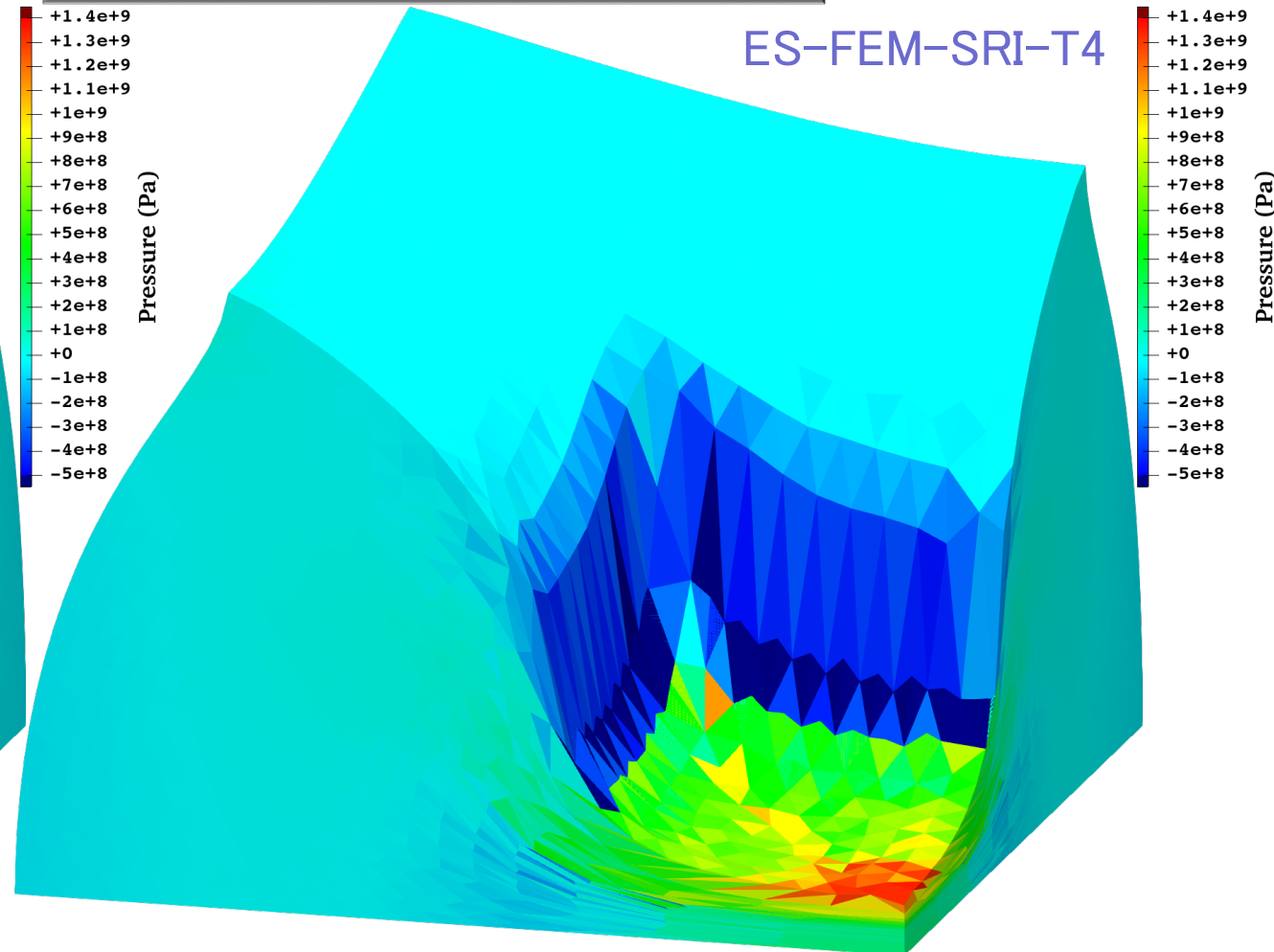
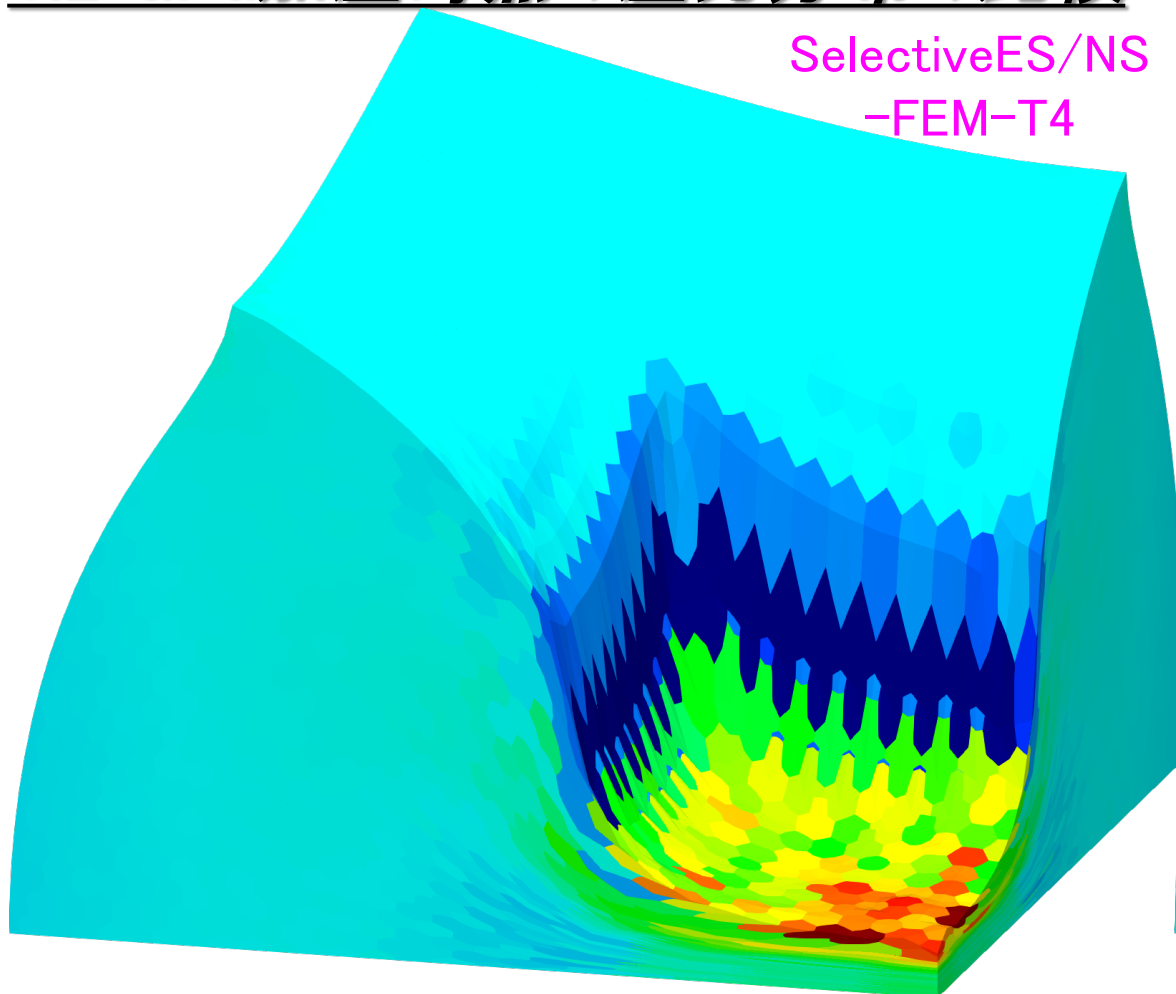
1.2 GPa加圧時点のMises応力分布の比較



偏差成分の計算法は両者同じなので、ほとんど違いは見られない。

1.2 GPa加圧時点の圧力分布の比較

※ Selective ES/NS-FEM-T4は節点周りで、
ES-FEM-SRI-T4はセル単位で
圧力が区分一定であることに要注意。



ES-FEM-SRI-T4の方が明らかに圧力チェッカーボーディングが少なく、実用に耐える精度。